This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: _____

ABR1345
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 07/18/88 CC STAT mm E/L 1
010: : |a 04025986//r85
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B50060
035/2: : |a (CaOTULAS)160122672
040: : |a DLC/ICU |c ICU |d MiU
050/1:0 : |a QA623 |b .S25
051/1: : |a QA623 |b .S26 |c Copy 2. Notice biographique omitted.
100:1 : |a Saussure, René de, |d 1868-
245:00: |a Sur la génération des courbes par roulement, |c par Réné de Saussure.
260: : |a Genève, |b Impr. Aubert-Schuchardt, |c 1895.
300/1: : |a 94, [2] p., |b diagrs. on 2 fold. pl. |c 28 cm.
500/1: : |a Notice biographique on last page.
502/2: : |a Thesis (Ph. D.)--Johns Hopkins university, 1895.
650/1: 0: |a Roulettes (Geometry)
998: : |c DPJ |s 9120

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: _____
Camera Operator: _____

Hosted by Google

THÈSE

PRÉSENTÉE AU *BOARD OF UNIVERSITY STUDIES OF THE JOHN HOPKINS UNIVERSITY*, BALTIMORE

1894

SUR LA GÉNÉRATION DES COURBES PAR ROULEMENT

PAR

René de SAUSSURE

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

FELLOW BY COURTESY OF THE JOHNS HOPKINS UNIVERSITY

GENÈVE

IMPRIMERIE AUBERT-SCHUCHARDT

REY ET MALAVALLON, SUCCESSEURS

1895

Hosted by Google

THÈSE

PRÉSENTÉE AU *BOARD OF UNIVERSITY STUDIES OF THE JOHN HOPKINS UNIVERSITY*, BALTIMORE

1894

SUR LA

GÉNÉRATION DES COURBES

PAR

ROULEMENT

PAR

René de SAUSSURE

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

FELLOW BY COURTESY OF THE JOHNS HOPKINS UNIVERSITY

GENÈVE

IMPRIMERIE AUBERT-SCHUCHARDT

REY ET MALAVALLON, SUCCESSEURS

1895

Hosted by Google

Hosted by Google

CHAPITRE PREMIER

Génération des courbes planes

Partie préliminaire

Tout déplacement d'une figure plane de forme invariable dans son plan peut être considéré comme produit par le roulement sur une courbe fixe déterminée, d'une courbe mobile déterminée à laquelle la figure plane est reliée invariablement.

Si la figure plane se réduit à un point, les courbes qui définissent le roulement deviennent indéterminées, à moins qu'on ne les assujettisse à certaines conditions ; par exemple on peut astreindre soit la courbe mobile, soit la courbe fixe à être une droite. Or, tout déplacement d'une figure plane réduite à un point, engendre une courbe plane. On est ainsi conduit à considérer une courbe plane quelconque comme engendrée, soit par le roulement d'une droite mobile sur une courbe fixe, soit par le roulement d'une courbe mobile sur une droite fixe.

La génération d'une courbe plane considérée sous l'un

Hosted by Google

de ces deux points de vue n'est pas encore une génération déterminée, c'est-à-dire qu'on peut engendrer une courbe plane donnée d'une infinité de manières différentes, soit par le roulement d'une droite sur une courbe, soit par celui d'une courbe sur une droite.

Mais la génération n'est plus possible que d'une seule manière, si l'on astreint la droite à être constamment normale à la courbe donnée.

Ceci est évident dans le cas du roulement d'une droite sur une courbe. Car, si la droite doit toujours être normale à la courbe donnée, la courbe sur laquelle doit rouler cette droite pour engendrer la courbe donnée, ne peut être que la *développée* de cette dernière courbe ; elle est par suite parfaitement déterminée.

Dans le cas du roulement d'une courbe sur une droite, la proposition subsiste, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'une courbe qui en roulant sur une droite fixe puisse engendrer une courbe donnée.

On dira que cette courbe est la *déroulée* de la courbe donnée.

Pour rendre cette proposition plus claire, comparons le roulement d'une droite sur une courbe au roulement d'une courbe sur une droite.

I. — *Génération d'une courbe plane par roulement d'une droite sur une courbe.*

Etant donnée une courbe E (fig. 1), une droite quelconque D et un point m *sur la courbe, il existe une certaine courbe C et une seule, telle que le point* m *engendre la courbe E, lorsque la droite D roule sur C en entraînant* m.

Car il y a toujours une manière et une seule de déterminer la courbe *C* élément par élément : le point *m* étant

Hosted by Google

donné, la normale mO à la courbe E est déterminée; le point d'intersection O de cette normale avec la droite D est le centre instantané de rotation du mouvement que doit prendre cette droite. Lorsque D a tourné d'un angle infiniment petit $d\theta$ autour de O et a pris la position D', le point m est venu en m', tel que $\overline{mm'} = \overline{mO}.\, d\theta$; la nouvelle position m' du point m est bien déterminée ; par suite aussi celle de la normale $m'O'$; celle-ci détermine sur D' le point O' et OO' est le premier élément de la courbe C; les autres s'obtiendront de la même manière.

La droite D étant donnée, la courbe C varie suivant la position initiale du point m sur la courbe E; ce point m peut être choisi arbitrairement sur la courbe donnée, *excepté à l'un des points d'intersection de cette courbe avec la droite donnée* ; il peut toutefois être choisi aussi près que l'on voudra de cette intersection.

En effet si l'on choisit le point m au point d'intersection A, le point O se confond avec A : donc lorsque la droite D tourne autour de A d'un angle $d\theta$, le point générateur reste immobile, puisqu'il est au centre de rotation.

Il y a exception si la droite D est normale à la courbe E; dans ce cas le point m peut être choisi en A, et si l'on astreint la droite à être constamment normale à la courbe, le point générateur m est forcément sur la droite D elle-même.

En effet, si les deux positions D et D' de la droite mobile doivent être normales à E, le point O est le centre de courbure correspondant au point A ; mais puisque mO est une normale, pour qu'elle passe par ce centre de courbure, il faut que le point m soit lui-même infiniment voisin de A. La courbe E est alors une développante de C,

Hosted by Google

c'est-à-dire que la courbe C doit être la développée de la courbe donnée.

Ainsi en résumé :

1° *La génération d'une courbe par roulement d'une droite sur une courbe, n'est pas une génération déterminée si l'on ne fait aucune restriction.*

2° *La restriction qui détermine cette génération consiste à astreindre la droite mobile à être constamment normale à la courbe donnée.*

3° *La courbe sur laquelle doit rouler une droite pour engendrer la courbe donnée dans ces conditions est la développée de la courbe donnée.*

Lorsqu'une droite roule sur une courbe, tous les points de la droite deviennent successivement des points de contact, à moins que la courbe n'ait des points de rebroussement (fig. 2). Dans ce cas, si B est le point de la droite D qui vient coïncider avec le point de rebroussement, tous les points de D situés au delà de B ne peuvent pas devenir des points de contact, à moins de considérer la tangente AT au point de rebroussement comme faisant partie de la courbe C; tous les points de D au delà de B deviennent alors simultanément des points de contact.

On verra qu'au point de vue du roulement, il convient de considérer les tangentes aux points de rebroussement comme faisant partie intégrante de la courbe sur laquelle se trouvent ces points singuliers, parce que ces tangentes ne troublent en aucune manière le roulement, et en les considérant comme appartenant à la courbe, on supprime les exceptions dans l'énoncé des théorèmes.

Ainsi, avec cette convention, on peut dire qu'*une courbe rencontre toujours sa développée, qu'elle ne la coupe qu'à angle droit et qu'aux points de rencontre correspond tou-*

Hosted by Google

jours un point de rebroussement soit sur la courbe elle-même, soit sur la développée [1].

II.— *Génération d'une courbe plane par roulement d'une courbe sur une droite* [2].

Etant donnée une courbe E et une droite quelconque D il existe une certaine courbe C et une seule, telle qu'un point m *du plan engendre la courbe donnée lorsque ladite courbe C roule sur la droite en entraînant le point* m.

Car il y a toujours une manière et une seule de déterminer la courbe C élément par élément : prenons un point m quelconque sur E (fig. 3), la normale mO est déterminée ; considérons la normale infiniment voisine $m'O'$: le point O est le centre instantané de rotation et lorsque m' vient en m en tournant autour de O, le point O' vient en un certain point Q ; OQ est le premier élément de la courbe C; les autres éléments s'obtiennent de proche en proche de la même manière.

Ce second mode de génération par roulement diffère du premier, car dans celui-ci, alors même que la courbe E et la droite D étaient données, la courbe C variait avec la position initiale du point m ; tandis qu'ici, on trouve toujours la même courbe C (mais dans différentes positions) quelle que soit la position initiale du point m sur E.

Néanmoins le second mode de génération conduit à la même proposition que le premier, à savoir que le point m peut se trouver n'importe où sur la courbe E, *excepté aux*

[1] On entend ici par « points de rencontre » non pas tous les points de rencontre fortuits, mais seulement ceux qui sont relatifs à des points correspondants sur la courbe et sur sa développée.

[2] Dans ces deux paragraphes certains passages ont été mis en caractères italiques afin de faciliter la comparaison entre les deux modes de génération.

Hosted by Google

points de rencontre de cette courbe avec la droite donnée D.

En effet, si l'on choisit le point m au point A, le point O se confond avec A, donc le point m tourne sur lui-même sans pouvoir décrire de courbe, à moins que la droite D ne soit normale à la courbe E.

Ainsi, lorsque la droite D est quelconque, la courbe C est telle que lorsqu'elle roule sur la droite, le point générateur m ne peut jamais traverser cette droite ; si la droite D ne rencontre pas la courbe E, la courbe C n'offrira rien de particulier ; mais si elle la rencontre, la courbe C aura forcément la forme d'une spirale dont le point asymptotique est le point m, et lorsque la spirale roule sur D, le point m n'atteint jamais le point A (fig. 4).

A la portion E' de la courbe E qui est de l'autre côté de la droite D, correspond une autre spirale, de sorte que la courbe C complète est formée de deux spirales ayant même point asymptotique.

La courbe E peut donc toujours être engendrée par le roulement d'une courbe sur une droite quelconque, si l'on supprime les éléments de la courbe E qui se trouvent sur la droite fixe. Or, ces éléments étant supprimés, la droite D ne rencontre plus la courbe E ; ainsi, pour que la génération par roulement soit possible, il faut et il suffit que la droite donnée ne rencontre pas la courbe E (ce qui veut dire que si elle la rencontre, on doit supprimer les éléments de la courbe qui se trouvent aux points d'intersection).

Il n'en est plus de même lorsque la droite D *est astreinte à être constamment normale* à la courbe E.

Dans ce cas, le point générateur peut coïncider avec les points de rencontre de la courbe E et de la droite fixe ; en effet si m est en A, le point O ne coïncide plus

Hosted by Google

avec le point A mais il se trouve au centre de courbure de la courbe E correspondant au point A, puisque dans ce cas mO et D sont deux normales infiniment voisines de la courbe E.

On voit aussi que la génération de la courbe E devient déterminée, parce qu'il n'existe en général qu'un nombre limité de droites qui ne coupent une courbe donnée qu'à angle droit. Ainsi les coniques en possèdent au plus deux, savoir leurs axes réels. Toute droite jouissant de cette propriété sera appelée *base* de la courbe donnée.

La condition qui rend déterminée la génération d'une courbe plane par roulement d'une courbe sur une droite est donc la même que celle qui détermine cette génération par roulement d'une droite sur une courbe. Lorsque cette condition est remplie, le point générateur se trouve en général sur la courbe mobile elle-même, de même que dans le premier mode de génération, il se trouve sur la droite mobile.

La courbe mobile qui engendre une courbe donnée en roulant sur la base de cette dernière, sera appelée *déroulée* de la courbe donnée. Réciproquement, lorsqu'une courbe mobile roule sur une droite, les roulettes engendrée par les différents points de cette courbe seront les *déroulantes* de cette dernière. De même que toutes les développantes d'une courbe fixe sont normales à la droite mobile, de même toutes les déroulantes d'une courbe mobile sont normales à la droite fixe sur laquelle elle roule.

Ainsi en résumé :

1° *La génération d'une courbe par roulement d'une courbe sur une droite, n'est pas une génération déterminée, si l'on ne fait aucune restriction.*

2° *La restriction qui détermine la génération consiste à*

Hosted by Google

astreindre la droite fixe à être constamment normale à la courbe donnée (c'est-à-dire à être une base de cette courbe).

3° *La courbe qui doit rouler sur une droite pour engendrer la courbe donnée dans ces conditions se nommera déroulée de la courbe donnée.*

Enfin : *Une courbe rencontre toujours sa base et ne la rencontre qu'orthogonalement* (d'après la définition même), *et aux points de rencontre d'une courbe avec sa base correspond en général un point de rebroussement soit sur la courbe elle-même, soit sur sa déroulée.*

Les deux modes de génération des courbes par roulement que nous venons de considérer conduisent à l'étude du problème inverse de celui que l'on traite généralement dans la théorie des roulettes. C'est-à-dire qu'au lieu de rechercher la roulette décrite par un point du plan, lorsqu'une certaine courbe roule sur une droite, on se propose de trouver quelle est la courbe qui doit rouler sur une droite donnée pour engendrer une courbe donnée.

Tel est le problème que nous avons plus particulièrement en vue; nous traiterons toutefois aussi de la théorie des roulettes en général.

Sur la théorie des roulettes planes.

On représente souvent une courbe par l'équation d'une droite mobile :

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = f(\alpha) \qquad (1)$$

α étant un paramètre variable; ce paramètre est l'angle que fait la droite mobile avec l'axe des x. La courbe définie par cette équation est l'enveloppe de la droite mobile;

Hosted by Google

elle est donc entièrement déterminée par la fonction $f(\alpha)$; lorsque cette fonction est donnée, on peut obtenir l'équation ponctuelle de la courbe en éliminant α entre l'équation (1) et sa dérivée par rapport à α. Sans qu'il soit nécessaire d'éliminer α, on peut considérer les deux équations:

$$\begin{cases} x \sin \alpha - y \cos \alpha = f(\alpha) \\ x \cos \alpha + y \sin \alpha = f'(\alpha) \end{cases} \qquad (2)$$

comme les équations de la courbe en fonction d'un paramètre auxiliaire, qui est ici l'angle de la tangente avec l'axe des x.

Toute courbe $y = \varphi(x)$ peut facilement se mettre sous cette forme puisqu'il suffit de poser :

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) = \text{tang } \alpha$$

équation d'où l'on tire x et par suite y en fonction de α. On sait que lorsque l'équation d'une courbe est mise sous la forme (2), l'élément d'arc de cette courbe a pour valeur :

$$ds = [f(\alpha) + f''(\alpha)]\, d\alpha$$

ainsi qu'il est facile de le voir, en calculant dx et dy en fonction de α. Les fonctions $f(\alpha)$ et $f'(\alpha)$ sont respectivement égales aux distances de l'origine à la tangente et à la normale à la courbe qui correspondent à l'angle α.

Si la courbe est tangente à l'axe des x (fig. 5) et que s représente l'arc compris entre le point de contact O' et le point M où la tangente fait l'angle α avec l'axe des x, on a :

$$\overline{OO'} + s = \int_o^a f(\alpha) d\alpha + f'(\alpha)$$

puisque $f(0) = 0$ et que $f'(0) = \overline{OO'}$.

Hosted by Google

I° *Roulement d'une courbe sur une droite.* Le problème direct s'énonce ainsi :

Étant donnée une courbe Γ *qui roule sur une droite, trouver l'équation de la roulette* R *décrite par un point quelconque* m, *invariablement relié à la courbe mobile.*

On prendra toujours la droite fixe comme axe des x, l'origine étant du reste un point quelconque de cette droite (fig. 6).

L'équation de la courbe mobile Γ dans sa position initiale est donnée sous la forme :

$$\begin{cases} x \sin \alpha - y \cos \alpha = f(\alpha) \\ x \cos \alpha + y \sin \alpha = f'(\alpha) \end{cases}$$

On a aussi $f'(0) = 0$; $f(0) = \overline{OO'}$, puisque la courbe est tangente à l'axe des x. Soit m la position initiale du point entraîné; u et v ses coordonnées ($u = \overline{Op}$, $v = \overline{mp}$).

Prenons un point A quelconque sur la courbe Γ; ses coordonnées sont $x = \overline{OC}$ et $y = \overline{AC}$; et cherchons quelle sera la position du point entraîné, lorsque le point A sera devenu le point de contact de la courbe avec l'axe des x. La tangente en A fait avec cet axe un angle α; menons encore la normale An au point A et appelons t et n les coordonnées du point m relativement aux axes At, An ($t = \overline{Ar}$, $n = \overline{mr}$).

Lorsque le point A sera devenu point de contact, il occupera sur ox la position B, telle que $\overline{O'B} =$ arc $\overline{OA} = s$, et si l'on suppose les axes At, An entraînés, At viendra coïncider avec Bx et le point m occupera la position M, telle que $\overline{Bq} = \overline{Ar} = t$ et $\overline{Mq} = \overline{mr} = n$.

Si l'on désigne par X et Y les coordonnées du point M par rapport aux axes fixes Ox, Oy, on a donc

Hosted by Google

$$X = \overline{Oq} = \overline{OO'} + \overline{O'B} + \overline{Bq} = \overline{OO'} + s + t$$
$$Y = \overline{Mq} = n$$

Or, en projetant le polygone fermé $Ar\,m\,p\,C$ respectivement sur At et sur An, on a :

$$t = (u - x)\cos\alpha + (v - y)\sin\alpha$$
$$n = -(u - x)\sin\alpha + (v - y)\cos\alpha$$

Mais puisque le point A est sur la courbe Γ, on a

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = f'(\alpha)$$

et

$$x\sin\alpha - y\cos\alpha = f(\alpha)$$

Par suite

$$t = u\cos\alpha + v\sin\alpha - f'(\alpha)$$
$$n = -u\sin\alpha + v\cos\alpha + f(\alpha)$$

D'autre part, on a vu que

$$\overline{OO'} + s = \int_0^\alpha f(\alpha)\,d\alpha + f'(\alpha)$$

Donc :

$$\overline{OO'} + s + t = u\cos\alpha + v\sin\alpha + \int_0^a f(\alpha)\,d\alpha$$

Et comme $\overline{OO'} + s + t = X$ et $n = Y$ et que X et Y sont les coordonnées d'un point quelconque de la roulette R décrite par le point m, l'équation générale des roulettes, engendrées par le roulement de la courbe Γ sur l'axe des x est

$$\left\{\begin{aligned} X &= u\cos\alpha + v\sin\alpha + \int_0^a f(\alpha)\,d\alpha \\ Y &= -u\sin\alpha + v\cos\alpha + f(\alpha) \end{aligned}\right. \qquad (3)$$

α étant un paramètre arbitraire.

Hosted by Google

En particulier, la roulette décrite par l'origine s'obtient en posant $u = o$ et $v = o$; elle a donc pour équation

$$\begin{cases} X = \int_o^\alpha f(\alpha)\, d\alpha \\ Y = f(\alpha) \end{cases}$$

Exemple : Une parabole roule snr une droite, trouver la roulette décrite par son foyer.

On peut prendre pour origine le point de contact de la parabole lorsque l'axe de celle-ci est perpendiculaire à la droite fixe (prise comme axe des x). L'équation de la parabole est alors $x^2 = 2py$, d'où $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{p} = \text{tang}\ \alpha$. On peut donc mettre cette équation sous la forme

$$\begin{cases} x = p\ \text{tang}\ \alpha \\ y = \frac{p}{2}\ \text{tang}^2\ \alpha \end{cases}$$

ou encore

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = \frac{p}{2} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = f(\alpha)$$

Telle est l'équation de la parabole considérée comme enveloppe d'une droite mobile. Donc si u et v sont les coordonnées d'un point quelconque du plan, lorsque le sommet de la parabole est point de contact, la roulette décrite par ce point a pour équation d'après les formules (3) :

$$X = u \cos \alpha + v \sin \alpha + \frac{p}{2} \left[\frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} - \sin \alpha \right]$$

$$Y = - u \sin \alpha + v \cos \alpha + \frac{p}{2} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

Hosted by Google

La roulette décrite par le foyer s'obtient en posant $u = o$ et $v = \frac{p}{2}$; son équation est donc :

$$\begin{cases} X = \frac{p}{4} \log \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \\ Y = \frac{p}{2} \frac{1}{\cos \alpha} \end{cases}$$

ou en éliminant α :

$$Y = \frac{p}{2} \cosh \left(\frac{2X}{p} \right)$$

c'est l'équation d'une chaînette.

Traitons maintenant le problème inverse : *Etant donnée une courbe quelconque, trouver l'équation de la courbe qui en roulant sur une droite donnée engendre la courbe donnée.*

On peut toujours prendre la droite fixe comme axe des x; la solution de ce problème peut alors se déduire de la forme de l'équation générale des roulettes, c'est-à-dire de la forme particulière des formules (3).

La seconde de ces formules est la dérivée par rapport à α de la première; donc lorsque l'équation de la courbe donnée est exprimée en fonction d'un paramètre arbitraire α et se trouve être de la forme :

$$\begin{cases} X = F(\alpha) \\ Y = F'(\alpha) \end{cases} \tag{4}$$

F' étant la dérivée de F, on peut trouver immédiatement la courbe qui en roulant sur l'axe des x, engendre la courbe donnée, en identifiant l'équation de cette courbe avec les équations (3). On obtient ainsi :

Hosted by Google

$$F(\alpha) = u \cos \alpha + v \sin \alpha + \int_0^\alpha f(\alpha) d\alpha$$
$$F'(\alpha) = - u \sin \alpha + v \cos \alpha + f(\alpha)$$

La dernière de ces équations détermine la courbe cherchée $f(\alpha)$, à condition de connaître les constantes u et v; or, comme les équations précédentes expriment des identités, on obtiendra la valeur de ces constantes en posant $\alpha = 0$, d'où :

$$u = F(0) \qquad\qquad v = F'(0)$$

et par suite :

$$f(\alpha) = F(0) \sin \alpha - F'(0) \cos \alpha + F'(\alpha)$$

La courbe qui en roulant sur ox engendre la courbe donnée a donc pour équation :

$$\begin{cases} x \sin \alpha - y \cos \alpha = F(0) \sin \alpha - F'(0) \cos \alpha + F'(\alpha) \\ x \cos \alpha + y \sin \alpha = F(0) \cos \alpha + F'(0) \sin \alpha + F''(\alpha) \end{cases}$$

Si l'on prend pour origine, sans changer la direction des axes, le point de la courbe donnée dont les coordonnées sont $u = F(0)$ et $v = F'(0)$, les équations de la courbe cherchée se réduisent à :

$$\begin{cases} x \sin \alpha - y \cos \alpha = F'(\alpha) \\ x \cos \alpha + y \sin \alpha = F''(\alpha) \end{cases} \qquad (5)$$

mais le roulement a toujours lieu sur l'ancien axe des x.

Exemple : L'équation ordinaire de la cycloïde en fonction d'un paramètre variable est :

$$X = R(\alpha - \sin \alpha)$$
$$Y = R(1 - \cos \alpha)$$

Ces équations sont donc de la même forme que les équa-

Hosted by Google

tions (4), c'est-à-dire que $Y = \frac{dX}{d\alpha}$. D'après les formules (5), en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes au point dont les coordonnées sont $u = F(0)$ et $v = F'(0)$, l'équation de la courbe qui en roulant sur l'ancien axe des x engendre la cycloïde, est :

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = R(1 - \cos \alpha)$$
$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = R \sin \alpha$$

Mais dans le cas actuel $F(0) = 0$ et $F'(0) = 0$, il n'y a donc pas lieu de changer les axes; du reste en éliminant α entre les dernières équations, on trouve :

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2$$

équation d'un cercle tangent à l'origine à l'axe des x. Or la cycloïde passe elle-même par l'origine, donc le point générateur est sur le cercle mobile.

Comme l'axe des x est ici la base de la cycloïde, on dira que le cercle est la déroulée de la cycloïde et, puisque le point générateur est sur le cercle, on voit que la cycloïde est une déroulante de sa déroulée.

Considérons maintenant le cas général où la courbe donnée est une courbe quelconque : $Y = \varphi(X)$. On peut représenter la même courbe d'une infinité de manières en fonction d'un paramètre auxiliaire α; on doit donc se demander si l'on peut toujours introduire un paramètre dans l'équation de la courbe donnée de telle sorte que l'Y de la courbe soit la dérivée de son X prise par rapport à ce paramètre, ou si cela est possible de plusieurs manières.

Hosted by Google

On doit avoir[1] $\frac{dX}{d\alpha} = Y$ d'où $\alpha = \int \frac{dX}{Y} + C^e$

ce qui peut s'écrire, u étant une constante arbitraire :

$$\alpha = \int_u^X \frac{dX}{\varphi(X)} \tag{6}$$

u est alors la valeur de X qui correspond à $\alpha = 0$.

De l'équation (6) on tire X en fonction de α et de la constante u : $X = F(\alpha, u)$.

[1] Cette remarque permet de démontrer facilement les théorèmes bien connus de Steiner :

1° Lorsqu'une courbe roule sur une droite, l'aire (en coordonnées cartésiennes) de la trajectoire décrite par un point m entraîné dans le roulement est à chaque instant égale au double de l'aire (en coordonnées polaires) de la podaire du point m par rapport à la courbe roulante (dans sa position initiale).

Soit X, Y les coordonnées d'un point quelconque de la trajectoire du point m. Puisque ces coordonnées satisfont à la condition $\frac{dX}{da} = Y$, on a :

$$\int_{X_0}^X Y dX = \int_o^\alpha Y^2 da$$

ce qui démontre le théorème, car Y est évidemment égal à la distance du point m à la tangente à la courbe roulante qui est inclinée de l'angle α, donc Y est égal au rayon vecteur de la podaire.

2° L'arc de la trajectoire du point m est à chaque instant égal à l'arc de la podaire.

L'angle de la tangente à la trajectoire et de l'axe des x a pour tangente : $\frac{dY}{dX}$, l'angle de la tangente à la podaire et de la normale à son rayon vecteur a pour tangente : $\frac{dY}{Yda}$, puisque ce rayon vecteur est égal à Y. Ces deux angles sont égaux puisque $dX = Yda$; si l'on désigne par V la valeur commune de ces deux angles, l'élément d'arc de la trajectoire du point m est égal à : $\frac{dX}{\cos V}$ et l'élément d'arc de la podaire à : $\frac{Yda}{\cos V}$. Ces éléments sont donc égaux, toujours en vertu de la relation : $dX = Yda$.

Hosted by Google

On obtient ainsi l'équation de la courbe donnée

$$Y = \varphi(X)$$

sous la forme voulue :

$$\begin{cases} X = F(\alpha,u) \\ Y = F'_\alpha(\alpha,u) \end{cases}$$

Ces équations représentent toujours la courbe donnée, quelle que soit la valeur attribuée à la constante u. Cette transformation étant opérée, l'équation de la courbe qui en roulant sur l'axe des X engendre la courbe donnée sera, d'après les formules (5) :

$$\begin{cases} x \sin \alpha - y \cos \alpha = F'_\alpha(\alpha,u) \\ x \cos \alpha + y \sin \alpha = F''_\alpha(\alpha,u) \end{cases} \qquad (7)$$

à condition de transporter l'origine au point dont les coordonnées sont : $F(0,u)$ et $F'(0,u)$, c'est-à-dire au point de la courbe donnée qui correspond à la valeur $\alpha = 0$; or on vient de voir que la valeur de X qui correspond à $\alpha = 0$ est u, c'est-à-dire qu'on trouvera toujours :

$$F(0,u) = u \qquad F'(0,u) = \varphi(u)$$

En d'autres termes les équations (7) représentent la courbe cherchée, en transportant l'origine au point de la courbe donnée dont l'abcisse est u. On voit alors que la constante arbitraire u n'est qu'un paramètre de position, et que si l'on fait varier ce paramètre, les équations (7) ne représentent pas une famille de courbes différentes, mais la même courbe dans différentes positions, ce à quoi l'on pouvait s'attendre puisque la courbe cherchée est mobile.

Le problème est donc parfaitement déterminé et les

Hosted by Google

équations (7) en fournissent la solution sous une forme très commode, puisqu'il suffit de faire varier u pour obtenir l'équation de la courbe cherchée dans toutes ses positions et que la valeur de ce paramètre est l'abcisse du point générateur mobile sur la courbe donnée ; de sorte que l'on peut trouver directement la position du point générateur correspondant à une position donnée de la courbe mobile et réciproquement.

Ainsi en résumé : étant donnée une courbe quelconque $Y = \varphi(X)$ on peut toujours exprimer son équation en fonction d'un paramètre auxiliaire α de telle sorte que $Y = \frac{dX}{d\alpha}$ et cette transformation n'est possible que d'une manière.

On retrouve ainsi les résultats obtenus géométriquement plus haut, à savoir que lorsqu'une courbe et une droite sont données, il existe toujours une courbe et une seule, qui en roulant sur la droite donnée engendre la courbe donnée.

Exemple : Quelle est la courbe qui en roulant sur l'axe des x engendre la courbe exponentielle : $Y = e^X$?

Soit m un point quelconque de la courbe d'abcisse u, on a :

$$\alpha = \int_u^X \frac{dX}{Y} = \int_u^X \frac{dX}{e^X} = e^{-u} - e^{-X}$$

D'où :

$$\begin{cases} X = \log \frac{1}{e^{-u} - \alpha} \\ Y = \frac{1}{e^{-u} - \alpha} \end{cases}$$

Hosted by Google

Cette équation représente la courbe donnée, quel que soit u, et l'on a bien pour $\alpha = o$:

$$X = u \text{ et } Y = e^u$$

Si donc on prend le point m pour origine, l'équation de de la courbe cherchée (dans la position qu'elle occupe lorsque le point générateur est en m) est, d'après les formules (7) :

$$\begin{cases} x \sin \alpha - y \cos \alpha = \dfrac{1}{e^{-u} - \alpha} \\ x \cos \alpha + y \sin \alpha = \dfrac{1}{(e^{-u} - \alpha)^2} \end{cases}$$

En général, on ne recherche que la nature de la courbe mobile, sans se préoccuper d'obtenir son équation dans ses différentes positions ; on donne alors à u telle valeur particulière que l'on voudra, choisie de manière à simplifier les calculs. Ainsi, si la courbe donnée coupe l'axe des Y (ce que l'on peut toujours supposer, puisqu'on dispose du choix de l'origine sur l'axe des x), on peut poser $u = 0$ et le résultat final est l'équation de la courbe mobile dans la position particulière qu'elle occupe lorsque le point générateur est sur l'axe des Y; cette équation ne contient alors plus de constante arbitraire. Ainsi dans l'exemple précédent, en prenant dès l'abord $u = 0$, on aurait trouvé comme équation de la courbe mobile :

$$\begin{cases} x \sin \alpha - y \cos \alpha = \dfrac{1}{1 - \alpha} \\ x \cos \alpha + y \sin \alpha = \dfrac{1}{(1 - \alpha)^2} \end{cases}$$

l'origine étant transportée au point d'intersection de la courbe donnée avec l'axe des Y. Dans le cas où la courbe

Hosted by Google

donnée passe par l'origine, il n'y a plus lieu de changer les axes lorsqu'on pose $u = 0$, car les équations (7) représentent alors la courbe mobile lorsque le point générateur est à l'origine.

La méthode analytique que nous venons d'employer conduit à la même discussion que la méthode géométrique :

Aux points de rencontre de la courbe donnée avec la droite fixe qui est ici l'axe des X, on a $Y = \varphi(X) = 0$ et par suite en ces points, la valeur de α (éq. 6) devient généralement infinie, c'est-à-dire que la courbe mobile aura un point asymptotique et que le point générateur ne pourra jamais traverser la droite fixe, quoiqu'il puisse s'en rapprocher autant que l'on voudra.

Ainsi une courbe quelconque peut être engendrée d'une manière et d'une seule par le roulement d'une courbe sur une droite donnée, pourvu que celle-ci ne rencontre pas la courbe donnée (ce qui veut dire que si elle la rencontre on doit supprimer les éléments de la courbe qui se trouvent sur la droite).

Exemple : Quelle est la courbe qui en roulant sur une droite engendre une droite?

1° Les deux droites sont parallèles, c'est-à-dire ne se rencontrent pas : le problème est possible sans restriction.

En prenant l'axe des x comme base du roulement, la droite qui doit être engendrée a pour équation : $Y = b$.

On a donc : $$\alpha = \int_u^X \frac{dX}{b} = \frac{1}{b}(X - u)$$

La nouvelle équation de la droite est ainsi :

$$\begin{cases} X = u + b\alpha \\ Y = b \end{cases}$$

Hosted by Google

d'où pour équation de la courbe cherchée, l'origine étant au point de la droite dont l'abcisse est u :

$$\begin{cases} x \sin \alpha - y \cos \alpha = b \\ x \cos \alpha + y \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire : $x^2 + y^2 = b^2$. La courbe mobile est un cercle ayant son centre au point générateur. Dans cet exemple particulier, la constante u ne figure pas dans l'équation de la courbe mobile ; cela tient à ce que l'équation du cercle relativement au point générateur est toujours la même, quel que soit u.

Le cercle ne doit pas être considéré comme la déroulée de la ligne droite parce que dans cet exemple l'axe des x n'est pas une base de la droite engendrée.

2° Les deux droites ne sont pas parallèles. On peut prendre l'origine à leur point de rencontre, l'axe des x étant toujours la base du roulement. L'équation de la droite donnée est alors : $Y = m\ X$

$$\text{D'où : } \alpha = \int_u^X \frac{dX}{m\,X} = \frac{1}{m} \log \frac{X}{u}$$

La nouvelle équation de la droite est ainsi :

$$\begin{cases} X = u\, e^{m\alpha} \\ Y = m\, u\, e^{m\alpha} \end{cases}$$

Donc, lorsque le point générateur est au point de la droite E (fig. 7) dont l'abcisse est u, la courbe cherchée a pour équation, relativement aux axes (x,y) :

$$\begin{cases} x \sin \alpha - y \cos \alpha = m\, u\, e^{m\alpha} \\ x \cos \alpha + y \sin \alpha = m^2\, u\, e^{m\alpha} \end{cases} \qquad (7 \text{ bis})$$

On tire de ces équations :

Hosted by Google

$$x^2 + y^2 = m^2 (1 + m^2) u^2 e^{2m\alpha}$$
$$\text{et } \frac{x}{y} = \frac{m \cos \alpha + \sin \alpha}{m \sin \alpha - \cos \alpha}$$

Et en posant ;

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \text{ et } \frac{x}{y} = - \text{ tang } \omega$$

on trouve : $\alpha = \omega - E$, E étant l'angle que fait la droite donnée avec l'axe des x. L'équation polaire de la courbe est alors

$$\rho = \pm u m \sqrt{1 + m^2}\, e^{m(\omega - E)}$$

Cette équation représente deux spirales logarithmiques égales et ayant même pôle. Ce pôle est du reste le point générateur ; celui-ci peut donc décrire toute la droite E excepté l'élément qui se trouve sur $0x$.

Une courbe quelconque étant donnée, pour que le point générateur puisse traverser ou seulement toucher la base du roulement, il faut que α, c'est-à-dire l'intégrale $\int_u^X \frac{dX}{\varphi X}$ reste finie aux points de rencontre de la courbe avec la base ; or en ces points, $\varphi (X) = 0$. Donc si X^0 est une racine de $\varphi (X)$ il faut que l'expression $\frac{X - X_0}{\varphi (X)}$ tende vers zéro lorsque X tend vers X_0, ou en prenant le rapport des dérivées, que: $\frac{1}{\varphi' (X_0)} = 0$

c'est-à-dire que le rapport $\frac{dX}{dY}$ doit être nul aux points de rencontre, ou encore : la droite fixe ne doit couper la courbe donnée qu'à angle droit.

Lorsque cette condition est remplie, on dit que la droite

Hosted by Google

fixe est une base de la courbe donnée et la courbe mobile correspondante en est la déroulée.

Ainsi pour trouver la déroulée d'une courbe quelconque, on se servira de la même méthode que précédemment, en ayant soin seulement de prendre comme axe des x une base de la courbe donnée.

Exemples :

1° *Déroulée d'une droite.* L'axe des x doit être perpendiculaire à la droite donnée. Le coefficient angulaire de celle-ci est infini ; or si l'on donne à m une valeur infinie dans l'équation de la spirale logarithmique trouvée précédemment, cette spirale est rejetée à l'infini.

Ainsi la ligne droite n'a pas de déroulée, ou si l'on veut sa déroulée est comme sa développée une courbe quelconque rejetée à l'infini dans une direction perpendiculaire à la sienne. Le roulement de cette courbe revient alors à une rotation autour d'un point à distance infinie, c'est-à-dire à une translation.

Quoique la ligne droite ait apparemment une infinité de bases, elle n'en a qu'une en réalité, puisque le roulement qui détermine sa génération se passe à l'infini et que toutes les bases de la droite se confondent à l'infini.

2° *Déroulée du cercle* : L'équation d'un cercle en prenant comme axe des x une de ses bases, c'est-à-dire un quelconque de ses diamètres est : $X^2 + Y^2 = R^2$, d'où :

$$\alpha = \int_0^X \frac{dX}{\pm\sqrt{R^2 - X^2}} = \text{arc sin}\,\frac{X}{R}$$

par suite :

$$X = R \sin \alpha$$
$$Y = R \cos \alpha$$

Donc en prenant l'origine au point de rencontre du

Hosted by Google

cercle avec l'axe des Y, l'équation de la déroulée du cercle est:

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = R \cos \alpha$$
$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = - R \sin \alpha$$

c'est-à-dire, par rapport à l'ancienne origine:

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0$$
$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = 0$$

donc la déroulée du cercle est, comme sa développée, un point qui coïncide avec son centre.

3° *Déroulée des coniques.* L'axe des x doit être une des bases de la conique, c'est-à-dire un de ses axes réels.

On peut prendre l'origine à l'un des sommets; l'équation de la conique est alors de la forme:

$$y^2 = \pm a^2 x^2 + 2 p x \qquad (8)$$

La conique sera une parabole lorsque $a = 0$, et lorsque a est différent de zéro, l'équation (8) représente une ellipse ou une hyperbole suivant que l'on prend le coefficient a^2 avec le signe *moins* ou avec le signe *plus*.

D'après ce qu'on a vu plus haut, puisque la conique passe par l'origine on obtiendra directement l'équation de la courbe cherchée dans la position qu'elle occupe lorsque le point générateur est à l'origine (c'est-à-dire au sommet de la conique) en posant $u = 0$ et sans avoir à changer les axes.

Déroulée de la parabole : L'équation de la parabole est: $y^2 = 2px$, donc :

$$\alpha = \int_0^x \frac{dx}{\pm \sqrt{2px}} = \pm \sqrt{\frac{2x}{p}}$$

La nouvelle équation de la parabole est alors:

Hosted by Google

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} p \alpha^2 \\ y = p \alpha \end{cases}$$

L'équation de la déroulée (par rapport aux mêmes axes) est donc :

$$\begin{cases} x \sin \alpha - y \cos \alpha = p\alpha \\ x \cos \alpha + y \sin \alpha = p \end{cases} \qquad (9)$$

Nous rechercherons plus loin la nature de cette courbe ; pour le moment nous nous bornerons à donner l'équation de la déroulée.

Déroulée de l'ellipse : L'équation de l'ellipse est :

$$y^2 = -a^2x^2 + 2px.$$

D'où :

$$\alpha = \int_0^x \frac{dx}{\pm\sqrt{-a^2x^2+2px}} = \frac{1}{a} \text{arc cos} \left(1 - \frac{a^2x}{p}\right)$$

La nouvelle équation de l'ellipse est donc :

$$x = \frac{p}{a^2} (1 - \cos a\alpha)$$

$$y = \frac{p}{a} \sin a\alpha$$

Et par suite, l'équation de sa déroulée est :

$$\begin{cases} x \sin \alpha - y \cos \alpha = \frac{p}{a} \sin (a\alpha) \\ x \cos \alpha + y \sin \alpha = p \cos (a\alpha) \end{cases} \qquad (10)$$

On a vu qu'à chaque base d'une courbe correspond une déroulée, mais quoique l'ellipse ait deux bases, ses deux déroulées sont des courbes de même nature et toutes deux sont comprises dans les équations (10), car l'équation (8)

Hosted by Google

peut se rapporter aussi bien au sommet du petit axe qu'à celui du grand axe; dans un cas $a < 1$, dans l'autre $a > 1$.

Il en est en général de même des courbes qui ont plusieurs bases.

Déroulée de l'hyperbole : L'équation de l'hyperbole est : $y^2 = a^2x^2 + 2px$. Pour passer du cas de l'ellipse au cas de l'hyperbole, il suffit de remplacer a^2 par $-a^2$, c'est-à-dire a par $\pm ai$. La nouvelle équation de l'hyperbole est alors, en employant les fonctions hyperboliques :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{p}{a^2}(1 - \cosh a\alpha) \\ y = \dfrac{p}{a}\sinh a\alpha \end{cases}$$

et celle de sa déroulée :

$$\begin{cases} x \sin\alpha - y\cos\alpha = \dfrac{p}{a}\sinh(a\alpha) \\ x\cos\alpha + y\sin\alpha = p\cosh(a\alpha) \end{cases} \qquad (11)$$

Nous terminerons l'étude du roulement d'une courbe sur une droite par la recherche de l'enveloppe d'une courbe entraînée.

Lorsqu'une courbe participe au mouvement de la courbe mobile, chacun de ses points décrit une roulette. Pour trouver l'équation de l'enveloppe d'une courbe entraînée A, il suffit de se rappeler que : *cette enveloppe est aussi l'enveloppe de toutes les roulettes décrites par les différents points* de A.

Or pour avoir l'équation de cette famille de roulettes on écrira dans l'équation générale des roulettes (éq. 3) que le point (u,v) doit se trouver sur la courbe A, c'est-à-dire que si $y = \varphi(x)$ est l'équation de A dans sa position

Hosted by Google

initiale, on doit poser : $v = \varphi(u)$ L'équation des roulettes décrites par les différents points de A est donc :

$$\begin{cases} x = u \cos \alpha + \varphi(u) \sin \alpha + \int_0^a f(\alpha) d\alpha \\ y = - u \sin \alpha + \varphi(u) \cos \alpha + f(\alpha) \end{cases} \quad (12)$$

Cette équation ne contient qu'un paramètre arbitraire u et l'on obtiendra l'enveloppe cherchée en éliminant ce paramètre entre les équations (12) et l'équation $\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial u}$ qui est dans le cas actuel :

$$\varphi'(u) = \frac{\sin \alpha f(\alpha) + \cos \alpha f'(\alpha) - u}{\cos \alpha f(\alpha) - \sin \alpha f'(\alpha) + \varphi(u)}$$

Exemple :

Trouver l'enveloppe du diamètre d'un cercle qui roule sur une droite.

L'axe des x est la base du roulement ; on peut prendre comme position initiale du cercle, celle où le diamètre considéré est parallèle à Ox et comme origine le point de contact correspondant.

L'équation du diamètre est alors : $y = R$ et par suite $v = \varphi(u) = R$ d'où $\varphi'(u) = 0$. On a vu que pour le cercle $f(\alpha) = R(1 - \cos \alpha)$: il faut donc éliminer u entre les trois équations :

$$\begin{cases} x = u \cos \alpha + R \sin \alpha + R(\alpha - \sin \alpha) \\ y = - u \sin \alpha + R \cos \alpha + R(1 - \cos \alpha) \\ 0 = \dfrac{\sin\alpha . R(1 - \cos\alpha) + \cos\alpha . R \sin\alpha - u}{\cos\alpha . R(1 - \cos\alpha) - \sin\alpha . R \sin\alpha + R} \end{cases}$$

qui deviennent après réduction :

Hosted by Google

$$\begin{cases} x = \quad u \cos \alpha + R \alpha \\ y = -u \sin \alpha + R \\ 0 = R \sin \alpha - u \end{cases}$$

D'où en éliminant u

$$\begin{cases} x = R (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) \\ y = R \cos^2 \alpha \end{cases}$$

Ou en posant $2\alpha = \varphi + \pi$

$$\begin{cases} x = \frac{R}{2} (\varphi - \sin \varphi) + \pi \frac{R}{2} \\ y = \frac{R}{2} (1 - \cos \varphi) \end{cases}$$

L'enveloppe est donc une cycloïde dont la déroulée est un cercle de rayon $\frac{R}{2}$.

Les formules (3) permettent aussi de trouver l'équation du cercle des inflexions : on sait que les points d'inflexion d'une courbe

$$X = \varphi(\alpha) \qquad\qquad Y = \chi(\alpha)$$

sont déterminés par la condition.

$$\varphi'(\alpha)\, \chi''(\alpha) - \varphi''(\alpha)\, \chi'(\alpha) = 0$$

Ainsi les valeurs de α, pour lesquelles la trajectoire du point u, v présente une inflexion, sont données par l'équation

$$[- u \sin \alpha + v \cos \alpha + f(\alpha)][u \sin \alpha - v \cos \alpha + f''(\alpha)] - [u \cos \alpha + v \sin \alpha - f'(\alpha)]^2 = 0$$

Réciproquement, le lieu des points u, v, qui pour une même valeur donnée α_0 de α ont un point d'inflexion sur

Hosted by Google

leur trajectoire, est représenté par l'équation précédente en y remplaçant α par α_0 et regardant u et v comme les coordonnées d'un point du lieu ; cette équation représente alors un cercle dont le rayon a pour valeur

$$R^2 = \frac{1}{4}\left[f''(\alpha_0) - f(\alpha_0)\right]^2 + f'^2(\alpha_0) + f(\alpha_0)f''(\alpha_0) - f'^2(\alpha_0)$$

ou

$$R = \frac{1}{2}\left[f(\alpha_0) + f''(\alpha_0)\right]$$

Ainsi ce rayon est la moitié du rayon de courbure de la courbe f au point où la tangente est inclinée de l'angle α_0. Les coordonnées du centre du cercle sont :

$$\begin{cases} u_0 = -\dfrac{1}{2}\sin\alpha_0\left[f''(\alpha_0) - f(\alpha_0)\right] + \cos\alpha_0 f'(\alpha_0) \\ v_0 = \quad\dfrac{1}{2}\cos\alpha_0\left[f''(\alpha_0) - f(\alpha_0)\right] + \sin\alpha_0 f'(\alpha_0) \end{cases}$$

Si l'on suppose le cercle entraîné dans le roulement, la trajectoire décrite par son centre s'obtient en remplaçant dans les formules (3) les coordonnées u, v par la valeur de u_0 et v_0 en fonction de α_0, que l'on vient de trouver : si dans l'équation de cette trajectoire on pose $\alpha = \alpha_0$, on trouve comme coordonnées du centre du cercle des inflexions

$$\begin{cases} X = \displaystyle\int_0^{\alpha_0} f(\alpha)\,d\alpha + f'(\alpha_0) \\ Y = \dfrac{1}{2}\left[f(\alpha_0) + f''(\alpha_0)\right] \end{cases}$$

c'est-à-dire, à cause de la valeur de l'arc de la courbe f donnée précédemment, que le cercle des inflexions est tangent à la droite sur laquelle a lieu le roulement au point de contact de la courbe roulante.

Hosted by Google

II° *Roulement d'une droite sur une courbe.* Le problème général s'énonce :

Étant donnée une courbe Γ, *trouver l'équation générale des roulettes décrites par les différents points du plan, lorsqu'une droite roule sur la courbe donnée.*

On prendra comme axe des x une des positions de la droite mobile, c'est-à-dire la courbe fixe Γ tangente à l'axe des x. L'équation de Γ est donnée sous la forme

$$\begin{cases} x \sin \omega - y \cos \omega = \varphi(\omega) \\ x \cos \omega + y \sin \omega = \varphi'(\omega) \end{cases}$$

et l'on a comme précédemment : $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = \overline{OO'}$.

On a vu que si la courbe Γ roulait sur l'axe des x (fig. 6), un point m du plan, de coordonnées u et v, décrirait une roulette mM dont l'équation serait, d'après les formules (3),

$$\begin{cases} X = u \cos \omega + v \sin \omega + \int_0^\omega \varphi(\omega) d\omega \\ Y = - u \sin \omega + v \cos \omega + \varphi(\omega) \end{cases}$$

X et Y étant les coordonnées d'un point quelconque de la roulette. Si au contraire l'axe des x roulait sur la courbe Γ en entraînant m, ce point décrirait une autre roulette; mais si au lieu de chercher la roulette décrite par m, on cherche la roulette décrite par le point M, il est évident que lorsque l'axe des x roule sur Γ, le point M revient en m lorsque B vient coïncider avec A (puisque $Bq = Ar$ et $Mq = mr$) *quoique* M *ne suive pas le même chemin* Mm, c'est-à-dire que le point X, Y revient au point u, v. Il suffit donc de permuter les lettres X, Y avec les lettres u, v dans les dernières équations, ce qui donne

Hosted by Google

$$\left\{\begin{aligned} X \sin \omega - Y \cos \omega &= \varphi(\omega) - v \\ - X \cos \omega - Y \sin \omega &= \int_o^\omega \varphi(\omega) d\omega - u \end{aligned}\right. \qquad (13)$$

Telle est l'équation générale des roulettes décrites par le point u, v lorsque la droite Ox roule sur la courbe Γ.

Le problème général inverse du précédent serait : *Étant donnée une courbe quelconque et une droite, trouver sur quelle courbe doit rouler la droite pour engendrer la courbe donnée.* Mais on a vu au commencement de cette étude que pour que ce problème soit déterminé, il faut se donner en outre la position du point générateur sur la courbe donnée qui correspond à la position initiale de la droite donnée. Ce problème offre donc peu d'intérêt, à moins que l'on n'astreigne la droite mobile à être constamment normale à la courbe donnée. On sait que dans ce cas la génération n'est plus possible que d'une manière et que le point générateur se trouve sur la droite mobile elle-même.

Comme l'axe des x doit coïncider avec une des positions de la droite mobile, cet axe doit être choisi de manière à coïncider avec une des normales à la courbe donnée.

On peut toujours mettre l'équation de la courbe donnée sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} - X \cos \omega - Y \sin \omega &= F(\omega) \\ X \sin \omega - Y \cos \omega &= F'(\omega) \end{aligned}\right.$$

ω étant l'angle que fait la normale avec l'axe des x. Mais puisque le point générateur est sur la droite mobile, il doit être sur l'axe des x dans sa position initiale ; on a donc $v = o$ dans les équations (13). Celles-ci peuvent alors s'identifier avec les équations de la courbe donnée, en posant

Hosted by Google

$$\varphi(\omega) = F'(\omega)$$

Les coordonnées du point générateur seront du reste

$$u = F(0) \qquad\qquad v = F'(0) = 0$$

puisque la courbe F est normale à l'axe des x.

Ainsi la courbe sur laquelle doit rouler une normale pour engendrer la courbe donnée a pour équation

$$\begin{cases} x \sin \omega - y \cos \omega = F'(\omega) \\ x \cos \omega + y \sin \omega = F''(\omega) \end{cases}$$

Ce sont bien les équations de la développée de la courbe F.

Étant donnée une courbe φ tangente à l'axe des x, toutes les développantes s'obtiennent en posant $v = 0$ dans les équations (13) et en faisant varier u.

Exemple : Développantes du cercle. Un cercle de rayon R et tangent à l'axe des x à l'origine, est l'enveloppe de la droite mobile :

$$x \sin \omega - y \cos \omega = R\,(1 - \cos \omega)$$

Soit u l'abcisse d'un point quelconque de Ox ; la développante du cercle donné engendré par le point u lorsque l'axe des x roule sur le cercle, a pour équation, d'après les formules (13) :

$$\begin{cases} X \sin \omega - Y \cos \omega = R\,(1 - \cos \omega) \\ -X \cos \omega - Y \sin \omega = R\,(\omega - \sin \omega) - u \end{cases}$$

ou en transportant l'origine au centre du cercle :

$$\begin{cases} x \sin \omega - y \cos \omega = R \\ -x \cos \omega - y \sin \omega = R\,\omega - u \end{cases} \qquad (14)$$

Enfin lorsqu'une droite roule sur une courbe, en entraî-

Hosted by Google

nant une courbe donnée, on pourra trouver l'enveloppe de la courbe entraînée par la même méthode que précédemment, parce que cette enveloppe est encore dans ce cas l'enveloppe des roulettes engendrées par les différents points de la courbe entraînée.

III° *Roulement d'une courbe sur une courbe.* On prendra comme axe des x la tangente commune aux deux courbes dans une quelconque des positions de la courbe mobile; l'origine est d'ailleurs laissée arbitraire. Soit :

$$\begin{cases} x \sin \omega - y \cos \omega = \varphi(\omega) \\ x \cos \omega + y \sin \omega = \varphi'(\omega) \end{cases} \quad \text{avec} \begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \varphi'(0) = \overline{OO'} \end{cases}$$

l'équation de la courbe fixe C et :

$$\begin{cases} x \sin \alpha - y \cos \alpha = f(\alpha) \\ x \cos \alpha + y \sin \alpha = f'(\alpha) \end{cases} \quad \text{avec} \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = \overline{OO'} \end{cases}$$

l'équation de la courbe mobile D dans sa position initiale.

On se propose : *étant données les deux courbes f et φ de trouver l'équation de la roulette décrite par un point quelconque* m *du plan, dont les coordonnées sont* u *et* v *dans sa position initiale, lorsque la courbe f roule sur la courbe φ.*

Lorsque le point p de la courbe D vient coïncider avec un certain point r de la courbe C (fig. 8), le point m se trouve en un certain point M de sa propre roulette. Or, si l'on suppose que la courbe D roule sur la tangente Ox, lorsque le point p sera devenu point de contact en q et que D occupera par conséquent la position D', le point m se trouvera transporté par ce roulement en un certain point n; si maintenant la tangente Ox roule sur la courbe fixe C en entraînant la courbe D' et le point n, lorsque le point q viendra coïncider avec r (puisque $\overline{O'q}$ = arc $\overline{O'p}$

$=$ arc $\overline{O'r}$) la courbe D' prendra la même position que si elle avait roulé sur la courbe C, donc aussi le point n viendra coïncider avec M.

Ainsi le roulement d'une courbe D sur une courbe C peut être décomposé en un roulement de la courbe D sur la tangente Ox et un roulement de cette tangente sur la courbe C.

Si l'on désigne par u_1, v_1 les coordonnées du point n, l'équation de la roulette mn est, d'après les formules (3)

$$\begin{cases} u_1 = u \cos \alpha + v \sin \alpha + \int_0^\alpha f(\alpha)\, d\alpha \\ v_1 = - u \sin \alpha + v \cos \alpha + f(\alpha) \end{cases}$$

De même, si X et Y sont les coordonnées du point M, l'équation de la roulette nM est, d'après les formules (13):

$$\begin{cases} X \sin \omega - Y \cos \omega = \varphi(\omega) - u_1 \\ - X \cos \omega - Y \sin \omega = \int_0^\omega \varphi(\omega)\, d\omega - v_1 \end{cases}$$

Il suffit maintenant d'éliminer u_1 et v_1 entre les quatre dernières équations pour obtenir celles de la roulette mM. On trouve ainsi :

$$\begin{cases} X \sin \omega - Y \cos \omega = u \sin \alpha - v \cos \alpha + \varphi(\omega) - f(\alpha) \\ X \cos \omega + Y \sin \omega = u \cos \alpha + v \sin \alpha + \varphi'(\omega) - f'(\alpha) \end{cases} \quad (15)$$

en remarquant que :

$$\overline{OO'} + \text{arc } \overline{O'r} = \overline{OO'} + \text{arc } \overline{O'p}$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^\omega \varphi(\omega)\, d\omega + \varphi'(\omega) = \int_0^\alpha f(\alpha)\, d\alpha + f'(\alpha) \quad (16)$$

équation qui fait dépendre α de ω.

Hosted by Google

L'équation (15) est générale, c'est-à-dire qu'elle s'applique aussi bien au cas où la courbe D roule extérieurement sur la courbe C.

L'enveloppe d'une courbe entraînée se trouverait toujours par la même méthode que précédemment. Nous nous occuperons plus particulièrement de la roulette décrite par l'origine et dont l'équation s'obtient en posant $u = 0$ et $v = 0$ dans les formules (15) :

$$\left\{\begin{array}{l} X \sin \omega - Y \cos \omega = \varphi(\omega) - f(\alpha) \\ X \cos \omega + Y \sin \omega = \varphi'(\omega) - f'(\alpha) \end{array}\right. \qquad (17)$$

Lorsque les courbes f et φ sont symétriques par rapport à leur tangente commune, on a $\omega = -\alpha$ et $\varphi(\omega) = -f(\alpha)$ d'où $\varphi'(\omega)\, d\omega = -f'(\alpha)\, d\alpha$ et comme $d\omega = -d\alpha$, il en résulte : $\varphi'(\omega) = f'(\alpha)$. Substituant ces valeurs dans les formules générales, on obtient pour équation de la trajectoire décrite par un point u,v:

$$\begin{array}{l} X = \quad u \cos 2\alpha + v \sin 2\alpha + 2 f(\alpha) \sin \alpha \\ Y = -u \sin 2\alpha + v \cos 2\alpha + 2 f(\alpha) \cos \alpha \end{array}$$

Les formules (15) peuvent être interprétées d'une manière plus large : une courbe f roule sur une droite pendant que cette droite roule sur une autre courbe fixe φ, les deux roulements étant indépendants l'un de l'autre, c'est-à-dire que les courbes f et φ n'ont plus un point de contact commun, mais simplement une tangente commune. Les formules qui donnent la trajectoire d'un point quelconque sont toujours les mêmes, seulement les angles ω et α ne dépendent plus l'un de l'autre par la relation (16). Cette relation devra être remplacée par une autre déduite des données de chaque problème particulier.

Exemples : Une courbe f roule sur une droite pendant

Hosted by Google

que celle-ci roule sur une courbe fixe φ, de telle sorte que les arcs des deux courbes qui ont subi le roulement soient constamment égaux. La trajectoire décrite par un point u,v du plan est toujours représentée par les formules (15). La distance a des deux points de contact de la tangente commune aux deux courbes reste constante et en exprimant que les arcs des courbes sont égaux, on obtient comme relation faisant dépendre ω de α :

$$\int_0^\alpha f(\alpha)\, d\alpha + f'(\alpha) + a = \int_0^\omega \varphi(\omega)\, d\omega + \varphi'(\omega)$$

en prenant pour axe des x la tangente commune dans la position initiale des courbes. Cette relation ne diffère de la relation (16) que par l'introduction d'une constante.

Si au lieu de conserver l'égalité des arcs, on conserve celle des angles de rotation, c'est-à-dire si la courbe f et la droite mobile tournent d'angles égaux pendant des temps égaux, la relation qui fait dépendre ω de α est simplement : $\omega = \alpha$. Les équations de la trajectoire d'un point, sont alors, en les résolvant par rapport à X et à Y :

$$X = u + [\varphi(\alpha) - f(\alpha)] \sin \alpha + [\varphi'(\alpha) - f'(\alpha)] \cos \alpha$$
$$Y = v - [\varphi(\alpha) - f(\alpha)] \cos \alpha + [\varphi'(\alpha) - f'(\alpha)] \sin \alpha$$

Des lignes cycloïdales : Comme les mots : *épicycloïdes*, *lignes cycloïdales*, etc., ont été employés dans des sens différents par les divers auteurs, nous devons définir exactement le sens que nous attribuerons à ces termes.

Étant donné un cercle mobile roulant sur un cercle fixe, toute ligne engendrée *par un des points du cercle mobile* sera appelée *ligne cycloïdale*. Ces lignes seront divisées provisoirement en deux genres : Si les deux cercles sont du même côté de leur tangente, la ligne cycloïdale appar-

Hosted by Google

tient au genre *hypocycloïde* ; s'ils sont de côtés différents, elle appartient au genre *épicycloïde*. Le cas limite qui sépare les deux genres est celui de la *cycloïde* (lorsque le cercle fixe devient une droite), ou celui de la *développante de cercle* (lorsque le cercle mobile devient une droite).

Étant donné un cercle mobile roulant sur un cercle fixe, toute ligne engendrée *par un point quelconque du plan* entraîné dans le mouvement sera appelée *ligne trochoïdale*. Ces lignes seront divisées en *hypotrochoïdes* et *épitrochoïdes* d'après la même règle que les lignes cycloïdales.

Soit R le rayon du cercle fixe (fig. 9). Ce cercle est l'enveloppe de la droite mobile :

$$x \sin \omega - y \cos \omega = R (1 - \cos \omega)$$

en prenant l'origine au point de contact. Soit r le rayon du cercle mobile : ce cercle sera du même côté de l'axe des x que le cercle fixe ou de côté différent suivant que r sera de même signe que R ou de signe contraire. Le cercle r, dans sa position initiale, est l'enveloppe de la droite mobile :

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = r (1 - \cos \alpha)$$

et la roulette engendrée par l'origine sera une hypocycloïde ou une épicycloïde suivant que r est de même signe que R ou de signe contraire. Cette roulette a pour équation, d'après les formules (17) :

$$X \sin \omega - Y \cos \omega = R (1 - \cos \omega) - r (1 - \cos \alpha)$$
$$X \cos \omega + Y \sin \omega = R \sin \omega - r \sin \alpha$$

α dépendant de ω par la relation (16) qui ici se réduit à :

$$r \alpha = R \omega$$

Reportant cette valeur de α dans les équations précé-

Hosted by Google

dentes, et résolvant par rapport à X et à Y on obtient l'équation ordinaire des lignes cycloïdales :

$$\begin{cases} X = r \sin\left(\frac{r - R}{r}\,\omega\right) - (r - R) \sin \omega \\ Y = R - r \cos\left(\frac{r - R}{r}\,\omega\right) + (r - R) \cos \omega \end{cases}$$

ω étant l'angle au centre du cercle R correspondant au point de contact des deux cercles et compté à partir de l'axe des y.

Cherchons encore l'équation des lignes cycloïdales considérées comme enveloppe de leur tangente et en les rapportant à des axes choisis en vue de faciliter l'étude de la génération des coniques, que nous traiterons plus loin.

Nous prendrons les nouveaux axes dans la position qu'ils occupent dans la fig. 10; c'est-à-dire l'origine au centre du cercle fixe, l'axe des x passant par le point de contact des deux cercles dans leur position initiale. Il faut donc remplacer X par y et Y par $R - x$. La ligne cycloïdale engendrée par le point A a ainsi pour équation :

$$\begin{cases} x = r \cos\left(\frac{r - R}{r}\,\omega\right) - (r - R) \cos \omega \\ y = r \sin\left(\frac{r - R}{r}\,\omega\right) - (r - R) \sin \omega \end{cases}$$

ω étant toujours l'angle au centre du cercle fixe.

Soit maintenant φ l'angle que fait la tangente à la ligne cycloïdale avec le nouvel axe des x; on a :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{d\omega}\right)}{\left(\frac{dx}{d\omega}\right)} = \operatorname{tang} \varphi$$

Hosted by Google

En remplaçant $\left(\frac{dy}{d\omega}\right)$ et $\left(\frac{dx}{d\omega}\right)$ par leur valeur, on trouve que :

$$\omega = \frac{2r}{2r - R}\varphi$$

Reportant cette valeur de ω dans l'équation de la ligne cycloïdale, celle-ci devient :

$$\begin{cases} x = r\cos\left(2\varphi\frac{r-R}{2r-R}\right) - (r-R)\cos\left(2\varphi\frac{r}{2r-R}\right) \\ y = r\sin\left(2\varphi\frac{r-R}{2r-R}\right) - (r-R)\sin\left(2\varphi\frac{r}{2r-R}\right) \end{cases}$$

En combinant ensemble ces équations, on a finalement pour équation générale des lignes cycloïdales considérées comme enveloppe de leur tangente :

$$\begin{cases} x\sin\varphi - y\cos\varphi = (2r-R)\sin\left(\frac{R}{2r-R}\varphi\right) \\ x\cos\varphi + y\sin\varphi = R\cos\left(\frac{R}{2r-R}\varphi\right) \end{cases}$$

et sous cette forme, on reconnaît la déroulée de l'ellipse (équation 10).

Sur une classe de lignes cycloïdales : Jusqu'ici nous n'avons considéré que les lignes cycloïdales obtenues en faisant varier r de $-\infty$ à $+\infty$, mais l'étude de ces lignes doit être poussée plus loin : lorsqu'on donne à r une valeur imaginaire, c'est-à-dire lorsqu'un cercle imaginaire roule sur un cercle réel, les lignes cycloïdales engendrées sont en général imaginaires, *mais il n'en est pas toujours ainsi* et il existe une infinité de courbes *réelles* qui sont engendrées par le roulement d'un cercle imaginaire sur un cercle fixe réel.

Hosted by Google

Donnons en effet à r une valeur imaginaire et posons : $r = \sigma + \rho i$; ce rayon dépend alors de deux paramètres σ et ρ, de sorte que même si l'on donne à σ une valeur particulière, le rayon r peut encore prendre une infinité de valeurs si on laisse ρ arbitraire.

Posons donc $\sigma = \frac{R}{2}$ et laissons ρ variable. Le rayon du cercle mobile est :

$$r = \frac{R}{2} + \rho i$$

d'où :

$$2r - R = 2\rho i .$$

En reportant cette valeur dans l'équation générale des lignes cycloïdales, celle-ci devient :

$$\begin{cases} x \sin \varphi - y \cos \varphi = 2\rho i \sin \left(\frac{R}{2\rho i} \varphi\right) \\ x \cos \varphi + y \sin \varphi = R \cos \left(\frac{R}{2\rho i} \varphi\right) \end{cases}$$

On voit que les imaginaires disparaissent et que l'équation devient, en employant les fonctions hyperboliques :

$$\begin{cases} x \sin \varphi - y \cos \varphi = 2\rho \sinh \left(\frac{R}{2\rho} \varphi\right) \\ x \cos \varphi + y \sin \varphi = R \cosh \left(\frac{R}{2\rho} \varphi\right) \end{cases} \tag{19}$$

et sous cette forme on reconnaît la déroulée de l'hyperbole (éq. 11).

Ainsi *les lignes cycloïdales engendrées par le roulement d'un cercle imaginaire sur un cercle réel, sont des courbes réelles, lorsque le rayon du cercle imaginaire est de la forme* $r = \frac{R}{2} + \rho i$, ρ étant un paramètre arbitraire qui peut varier de $-\infty$ à $+\infty$.

Hosted by Google

Il y a donc une infinité de pareilles courbes et nous leur donnerons le nom de *paracycloïdes.*

En résumé on a la classification suivante des lignes cycloïdales :

1° R a une valeur finie :

$$\begin{cases} \text{Hypocycloïdes :} & -\infty < r < 0 \\ \text{Epicycloïdes :} & 0 < r < \infty \\ \text{Développante de cercle :} & r = \pm\infty \\ \text{Paracycloïdes :} & r = \dfrac{R}{2} + \rho i \text{ avec } -\infty < \rho < +\infty \end{cases}$$

2° R est infini :

Cycloïdes : $-\infty < r < +\infty$

Il est intéressant de remarquer d'une manière générale que lorsqu'une courbe imaginaire roule sur une courbe la roulette décrite par un certain point du plan peut être réelle (mais les autres points décrivent des courbes imaginaires).

IV. *Génération des coniques.* Les coniques, ainsi que toute autre courbe, peuvent être engendrées soit par le roulement de leur normale sur leur développée, soit par le roulement de leur déroulée sur leur base. Cette dernière génération est la seule qui nous intéresse.

1° *Parabole:* L'équation de la déroulée de la parabole trouvée plus haut (éq. 9) est identique (à part la position des axes) à l'équation (14) ; cette déroulée est donc la développante d'un cercle de rayon p (fig. 11). Le point générateur est le centre du cercle ; il se trouve donc bien sur la déroulée, parce qu'il est sur la tangente au point de rebroussement de la développante.

Par suite la parabole est une déroulante de sa déroulée.

2° *Ellipse:* On a vu que la déroulée de l'ellipse est une

Hosted by Google

ligne cycloïdale appartenant au genre hypocycloïde ou au genre épicycloïde. En effet on peut identifier les équations (10) de cette déroulée avec les équations (18) en posant :

$$\begin{cases} p = R \\ a = \dfrac{R}{2r - R} \end{cases} \qquad \text{ou :} \quad \begin{cases} R = p \\ r = \dfrac{p}{2}\,\dfrac{a+1}{a} \end{cases} \qquad (20)$$

Quelles que soient les valeurs des coefficients p et a dans l'équation de l'ellipse, les valeurs correspondantes de R et de r sont toujours réelles, et réciproquement. Ainsi la déroulée d'une ellipse quelconque est une hypocycloïde ou une épicycloïde [1] et réciproquement l'ellipse est toujours une des déroulantes d'une hypocycloïde ou d'une épicycloïde quelconque.

Il n'est du reste pas besoin de traiter séparément les deux axes de l'ellipse car, en donnant à a et à p toutes les valeurs possibles, on trouve deux fois la même ellipse : l'axe des x coïncidant successivement avec le grand axe et avec le petit axe.

Le point générateur est toujours le centre du cercle de rayon R, il se trouve donc sur les tangentes à tous les points de rebroussement de la ligne cycloïdale.

La génération de la parabole n'est du reste qu'un cas particulier de celle de l'ellipse.

La figure 12 représente l'épicycloïde dans ses différentes positions et l'on voit qu'à un tour complet de l'ellipse

[1] Cette génération de l'ellipse a déjà été démontrée en partant de la ligne cycloïdale ; on en trouvera en particulier une démonstration géométrique dans la dernière édition du bel ouvrage de M. le colonel Mannheim sur la géométrie cinématique. Mais au point de vue du sujet que nous traitons, il était intéressant d'arriver au résultat par la voie inverse, c'est-à-dire en partant de l'ellipse.

Hosted by Google

correspondent deux boucles de la ligne cycloïdale. Le point A est le centre de courbure de l'ellipse correspondant au sommet O parce que le point O est le point de rencontre de l'ellipse avec sa base.

Enfin les demi-axes de l'ellipse ont pour valeur en fonction des coefficients a et p :

$$\begin{cases} A = \dfrac{p}{a^2} \\ B = \dfrac{p}{a} \end{cases} \qquad \text{ou :} \begin{cases} a = \dfrac{B}{A} \\ p = \dfrac{B^2}{A} \end{cases}$$

D'où en remplaçant p et a par leur valeur (eq. 20) :

$$\begin{cases} A = \dfrac{(2r - R)^2}{R} \\ B = 2r - R \end{cases} \qquad \text{ou :} \begin{cases} R = \dfrac{B^2}{A} \\ r = \dfrac{1}{2}\dfrac{B}{A}(A + B) \end{cases}$$

3° *Hyperbole :* Les équations de la déroulée de l'hyperbole (éq. 11) peuvent être identifiées aux équations (19) de la paracycloïde en posant :

$$\begin{cases} p = R \\ a = \dfrac{R}{2\rho} \end{cases} \qquad \text{ou :} \begin{cases} R = p \\ \rho = \dfrac{p}{2a} \end{cases} \qquad (21)$$

Quelles que soient les valeurs des coefficients a et p, les valeurs correspondantes de R et ρ sont réelles et déterminées et réciproquement ; donc la déroulée d'une hyperbole quelconque est une paracycloïde et réciproquement, l'hyperbole est toujours une des déroulantes de la paracycloïde.

Les relations entre les axes de l'hyperbole et les rayons des cercles sont :

Hosted by Google

$$\begin{cases} A = \dfrac{4\rho^2}{R} \\ B = 2\rho \end{cases} \qquad \text{ou :} \qquad \begin{cases} R = \dfrac{B^2}{A} \\ \rho = \dfrac{B}{2} \end{cases}$$

Le point générateur est toujours le centre du cercle de rayon R.

En résumé : la déroulée d'une conique quelconque est une ligne cycloïdale et l'une des déroulantes d'une ligne cycloïdale quelconque est toujours une conique. De plus à une conique quelconque correspond une seule ligne cycloïdale, et réciproquement, de sorte que l'on peut étudier toutes les formes dont les coniques sont susceptibles en les considérant comme dérivées du cercle par roulement.

V. *Classification des coniques.* On obtiendra toutes les formes de coniques en faisant varier les rayons des cercles : le cercle fixe R doit toujours être réel, mais le cercle mobile r peut être imaginaire.

On divisera donc les coniques en deux genres : le premier comprendra les coniques dont le cercle mobile est réel et l'on dira qu'elles appartiennent au genre *ellipse* ; le second genre comprendra les coniques dont le cercle mobile est imaginaire, on dira qu'elles appartiennent au genre *hyperbole.*

Lorsque les rayons R et r varient proportionnellement, les lignes cycloïdales restent semblables à elles-mêmes et par suite aussi les coniques dont elles sont la déroulée. Comme deux coniques semblables ont la même forme, on obtiendra toutes les formes dont les coniques sont susceptibles en laissant R constant et ne faisant varier que r.

Il y a donc trois cas à distinguer suivant que le rayon R est fini nul ou infini.

1er cas : le rayon R du cercle fixe a une valeur donnée finie.

Hosted by Google

Il faut donner à r toutes les valeurs possibles de $-\infty$ à $+\infty$ et toutes les valeurs imaginaires de la forme $\left(\frac{R}{2} + \rho i\right)$, ρ variant de $-\infty$ à $+\infty$.

1° *Genre ellipse :* r varie de $-\infty$ à $+\infty$. On a trouvé plus haut pour valeur de r : $r = \frac{R}{2}\frac{a+1}{a}$

a étant le coefficient variable de l'équation de l'ellipse :

$$y^2 = -a^2x^2 + 2Rx$$

Représentons par une courbe (fig. 13) la relation entre r et a ; cette courbe est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont l'axe des r et une parallèle à l'axe des a d'abcisse $\frac{R}{2}$.

Or, il suffit, pour obtenir toutes les formes possibles d'ellipse de ne considérer qu'une des branches de l'hyperbole équilatère. En effet, si l'on considère deux points de cette courbe ayant des ordonnées a égales et de signe contraire la demi-somme de leurs abcisses est égale à $\frac{R}{2}$, c'est-à-dire que si l'on désigne ces abcisses par r' et r'' on a :

$$r' + r'' = R$$

Or, d'après un théorème connu sur les lignes cycloïdales, lorsque deux cercles roulent sur un même cercle fixe et que la somme algébrique des rayons des cercles mobiles égale le rayon du cercle fixe, ces deux cercles mobiles engendrent la même ligne cycloïdale et par suite la même ellipse.

Il suffit donc de faire varier r de $-\infty$ à $+\frac{R}{2}$.

Pour $r = -\infty$, le cercle mobile devient une droite

Hosted by Google

et l'épicycloïde est une développante de cercle : l'ellipse correspondante a reçu le nom de *parabole.*

Faisons maintenant croître r : tant que r est négatif, la ligne cycloïdale est une épicycloïde qui se trouve en dehors du cercle R, comme dans la fig. (12) et l'axe des x coïncide avec le grand axe de l'ellipse.

Lorsque $r = 0$, l'épicycloïde se réduit au point A et lorsque ce point roule sur l'axe des x, le centre du cercle R décrit un *cercle* de même rayon ayant son centre au point A.

Lorsque r croît de zéro à $\frac{R}{2}$, la ligne cycloïdale est une hypocycloïde dont les boucles sont en dedans du cercle de rayon A (fig. 14) et par suite l'axe des x coïncide avec le petit axe de l'ellipse. Mais les ellipses de cette catégorie ne sont pas les mêmes que les précédentes, car on a supposé que le rayon R était constant et comme ce rayon est aussi le rayon de courbure de l'ellipse au point O, on ne peut pas retrouver deux fois la même ellipse puisque les rayons de courbure correspondant à ses deux axes ne peuvent pas être égaux.

Enfin, lorsque $r = \frac{R}{2}$, on sait que l'hypocycloïde se réduit à une droite et par suite aucun roulement ne peut se produire. Mais en considérant ce cas comme cas limite, on voit que lorsque r est très voisin de $\frac{R}{2}$ l'hypocycloïde a la forme ABC... (fig. 15) et lorsque les deux premières boucles AB et BC roulent sur Ox, le point O décrit une ellipse E très petite dont le petit axe coïncide avec Ox. De sorte que le cas où $r = \frac{R}{2}$ correspond à une ellipse évanouissante.

Hosted by Google

En résumé lorsque r varie de $-\infty$ à $+\frac{R}{2}$ on a le résultat suivant :

$r = -\infty$	développante de cercle	parabole
$-\infty < r < 0$	épicycloïde	ellipse allongée
$r = 0$	point	cercle
$0 < r < \frac{R}{2}$	hypocycloïde	ellipse aplatie
$r = \frac{R}{2}$	droite	point

2° *Genre hyperbole* : Le cercle mobile est imaginaire et la valeur de son rayon est de la forme : $\frac{R}{2} + \rho i$, ρ variant de $-\infty$ à $+\infty$.

On a trouvé plus haut : $\rho = \frac{R}{2a}$, a étant le coefficient variable de l'équation de l'hyperbole : $y^2 = a^2x^2 + 2Rx$. Représentons encore par une courbe la relation entre ρ et a (fig. 16) cette courbe est toujours une hyperbole équilatère mais ses deux asymptotes coïncident avec les axes.

Or il suffit de considérer seulement une des branches de l'hyperbole équilatère, car si l'on prend deux points sur cette courbe ayant des ordonnées a égales et de signe contraire, leurs abcisses ρ sont aussi égales et de signe contraire, de sorte que les rayons correspondants des cercles mobiles sont :

$$r' = \frac{R}{2} + \rho\, i \qquad r'' = \frac{R}{2} - \rho\, i$$

et ces rayons satisfont à la relation :

$$r' + r'' = R$$

donc les deux cercles r' et r'' engendrent la même paracy-

Hosted by Google

cloïde. Ainsi le théorème sur la double génération des lignes cycloïdales subsiste pour les paracycloïdes et on peut l'énoncer de la manière suivante :

Lorsque deux cercles imaginaires roulent sur un même cercle réel et engendrent des paracycloïdes, ces paracycloïdes seront les mêmes si les rayons des cercles mobiles sont des imaginaires conjuguées.

Il suffit donc de faire varier ρ de zéro à $+\infty$.

Mais il faut auparavant se rendre compte de la forme générale des paracycloïdes.

Les paracycloïdes ont, ainsi que les autres lignes cycloïdales un point de rebroussement au point A (fig. 17) ; l'axe des x est évidemment un axe de symétrie de la courbe de sorte que l'hyperbole engendrée par le point O sera aussi symétrique par rapport au même axe.

Mais la paracycloïde n'a jamais qu'un seul point de rebroussement et son rayon vecteur croît continuellement à partir du point A de sorte qu'elle est analogue à la développante de cercle. Par suite l'hyperbole est une courbe à branches infinies comme la parabole.

En remplaçant les fonctions hyperboliques par les transcendantes ordinaires, l'équation de la paracycloïde devient :

$$\begin{cases} x \sin\varphi - y \cos\varphi = \rho \left[e^{\frac{R}{2\rho}\varphi} - e^{-\frac{R}{2\rho}\varphi} \right] \\ x \cos\varphi + y \sin\varphi = \frac{R}{2} \left[e^{\frac{R}{2\rho}\varphi} + e^{-\frac{R}{\rho}\varphi} \right] \end{cases}$$

dans laquelle φ est l'angle que fait avec Ox la tangente à la paracycloïde. Or à mesure que l'angle φ augmente, c'est-à-dire que l'on s'éloigne du point de rebroussement

Hosted by Google

A, le terme $e^{-\frac{R}{2\rho}\varphi}$ tend vers zéro, de sorte que la paracycloïde se rapproche de plus en plus de la courbe :

$$\begin{cases} x \sin \varphi - y \cos \varphi = \rho e^{\frac{R}{2\rho}\varphi} \\ x \cos \varphi + y \sin \varphi = \frac{R}{2} e^{\frac{R}{2\rho}\varphi} \end{cases}$$

Or ces équations peuvent être identifiées aux équations (7 bis) en posant :

$$\begin{cases} \rho = mu \\ R = 2m^2 u \end{cases} \qquad \text{ou :} \begin{cases} m = \frac{R}{2\rho} \\ u = \frac{2\rho^2}{R} \end{cases}$$

Donc la paracycloïde a une asymptote curviligne et cette asymptote est une spirale logarithmique ayant son pôle à l'origine, c'est-à-dire au centre du cercle de rayon R.

Du reste, à cause de la symétrie relativement à l'axe des x, il faut dire pour être complet que la paracycloïde a deux asymptotes curvilignes qui sont des spirales logarithmiques symétriques par rapport à l'axe des x, et ayant même pôle.

Lorsque la paracycloïde roule sur la tangente au point de rebroussement, le centre du cercle R, c'est-à-dire le pôle des spirales engendre l'hyperbole, et puisque ces spirales sont asymptotes à la paracycloïde, il arrivera un moment où on peut les considérer comme roulant elles-mêmes sur l'axe des x.

Mais on a vu que lorsque une spirale logarithmique roule sur une droite, son pôle décrit une droite, et comme il décrit aussi l'hyperbole, cette dernière doit se rapprocher de plus en plus d'une certaine droite située à distance

Hosted by Google

finie. L'hyperbole a donc deux asymptotes symétriques par rapport à l'axe des x. D'ailleurs on se rappelle que m était le coefficient angulaire de la droite décrite par le pôle de la spirale, et comme $m = \frac{R}{2\rho} = \frac{B}{A}$ on voit que les asymptotes de l'hyperbole sont inclinées sur Ox d'un angle dont la tangente est égale au rapport des axes.

Faisons maintenant varier ρ de zéro à l'infini.

Pour $\rho = 0$ le rayon du cercle mobile est réel et égal à $\frac{R}{2}$. On sait que dans ce cas la ligne cycloïdale est une droite : dans le cas de l'ellipse, en donnant à r des valeurs très voisines de $\frac{R}{2}$ on a trouvé que l'ellipse se réduisait à un point . Mais ici il faut faire tendre r vers $\frac{R}{2}$ par des valeurs imaginaires, de sorte que la limite n'est plus la même. Lorsque ρ est très petit, m est très grand et l'on a vu que dans ce cas la spirale logarithmique est rejetée à l'infini et que son pôle décrit l'axe des y. L'hyperbole évanouissante est donc une droite passant par le centre du cercle R et perpendiculaire au diamètre que décrit le point A du cercle mobile r.

Lorsque ρ croît continuellement de zéro à l'infini, m diminue de même donc aussi l'angle des asymptotes de l'hyperbole. On peut distinguer dans cette décroissance deux périodes séparées par la valeur $\rho = \frac{R}{2}$ pour laquelle $m = 1$ valeur qui correspond à une hyperbole équilatère, Donc pour les valeurs de ρ comprises entre zéro et $\frac{R}{2}$ l'angle des asymptotes est obtus et pour les valeurs comprises entre $\frac{R}{2}$ et l'infini, cet angle est aigu.

Hosted by Google

Enfin lorsque $\rho = \infty$, r est aussi infini, la paracycloïde est une développante de cercle et la conique correspondante une parabole.

Ainsi en résumé, on a le tableau suivant :

$\rho = 0$	$r = \frac{R}{2}$	droite	droite
$0 < \rho < \frac{R}{2}$		paracycloïde	hyperbole aplatie
$\rho = \frac{R}{2}$	$r = \frac{R}{2}(1+i)$	paracycloïde équilatère	hyperbole équilatère
$\frac{R}{2} < \rho < \infty$		paracycloïde	hyperbole allongée
$\rho = \infty$	$r = \infty$	développante de cercle	parabole

On voit que le passage du genre ellipse au genre hyperbole se fait soit par la valeur $r = \infty$ c'est-à-dire par la parabole, soit par la valeur $r = \frac{R}{2}$, mais dans ce dernier cas le passage n'est pas continu et l'on passe brusquement d'un point à une droite.

IIe *cas : Le rayon R du cercle fixe a une valeur nulle.* Lorsque R varie, r varie proportionnellement parce que l'expression de r contient R en facteur, de sorte que les lignes cycloïdales et par suite les coniques restent semblables à elles-mêmes. Le cas où $R = 0$ n'est donc pas un cas distinct mais simplement un cas limite et les coniques qui correspondent à ce cas sont simplement les formes limites que l'on obtient lorsque les coniques étudiées précédemment se déforment en restant semblables à elles-mêmes.

Dans le genre ellipse, lorsque $R = 0$, $r = 0$; la ligne cycloïdale se réduit à un point qui coïncide avec le centre

Hosted by Google

du cercle R ; l'ellipse correspondante est aussi un point.

Dans le cas de la parabole, lorsque $R = 0$, r est indéterminé car dans ce cas $r = R \times \infty = 0 \times \infty$. On a donc un cercle qui roule sur un point ; la ligne cycloïdale est toujours un point qui coïncide avec le centre du cercle R. En considérant ce cas comme cas limite, on trouve que la parabole correspondante est une droite qui coïncide avec l'axe des x.

Dans le genre hyperbole, lorsque $R = 0$, $r = 0$ et $\rho = 0$; mais $m = \frac{R}{2\rho}$ a une valeur indéterminée.

Les spirales logarithmiques asymptotes ont toujours leurpôle au centre du cercle R, et comme celui-ci se réduit à un point, la paracycloïde se confond avec les deux spirales ; l'hyperbole dégénère alors en deux droites passant par le pôle commun des spirales ; du reste l'angle des deux droites peut prendre une valeur quelconque, puisque cet angle dépend de m qui est indéterminé.

IIIe *cas : Le rayon R du cercle fixe est infini.* L'origine centre du cercle R est toujours le point générateur de la conique, mais la circonférence de ce cercle est à l'infini ainsi que la ligne cycloïdale, de sorte que l'origine décrit toujours l'axe des y, c'est-à-dire que la conique est toujours une droite.

Il est à remarquer que lorsque R est infini, r est en général infini, de sorte que les deux cercles sont des droites et la ligne cycloïdale est simplement un point à l'infini ; mais $r = \frac{R}{2} \frac{a+1}{a}$ de sorte que lorsque $a = -1$, R étant infini, r a une valeur finie quelconque et la ligne cycloïdale correspondante est une cycloïde. Cette cycloïde est à l'infini.

Hosted by Google

Donc en considérant toutes les formes possibles de coniques, nous avons rencontré toutes les espèces de lignes cycloïdales et l'on peut dire maintenant :

Que la déroulée d'une conique quelconque est une ligne cycloïdale, et réciproquement que *toute ligne cycloïdale est la déroulée d'une conique et d'une seule* ou si l'on veut: Parmi les déroulantes d'une ligne cycloïdale quelconque se trouve toujours une conique.

Hosted by Google

CHAPITRE II

Génération des courbes gauches

Partie préliminaire

Lorsqu'une surface développable roule sur un plan, son arête de rebroussement roule de telle manière que le plan osculateur de cette arête coïncide continuellement avec le plan fixe. Comme ce roulement est parfaitement défini, on dira qu'*une courbe gauche roule sur un plan,* lorsqu'elle roule de telle sorte que la surface développable correspondante roule sans glissement sur le plan, lorsqu'elle est entraînée dans le mouvement.

On peut alors au point de vue du roulement remplacer la courbe gauche par la surface et vice-versa.

On dira qu'*un plan roule sur une courbe gauche,* lorsque ce plan roule sur la surface développable dont la courbe gauche est l'arête de rebroussement.

On est ainsi conduit à considérer une courbe gauche quelconque comme engendrée soit par le roulement d'un plan mobile sur une courbe gauche (ou sur une surface développable) fixe, soit par le roulement d'une courbe gauche (ou surface développable) mobile sur un plan fixe.

Cette génération étant tout-à-fait analogue à celle des courbes planes, il est inutile d'en recommencer la discus-

Hosted by Google

sion qui se ferait par les mêmes procédés et il suffit d'en rappeler les résultats :

1° Etant donnée une courbe gauche E, un plan fixe D et un point m sur la courbe E, il existe une certaine courbe gauche C (ou une certaine surface développable S) et une seule, telle que le point m engendre la courbe donnée, lorsque le plan D roule sur la courbe C (ou sur la surface S).

Le point m peut être choisi arbitrairement excepté à l'un des points d'intersection du plan D avec la courbe donnée.

Lorsque le plan D est astreint à rester constamment normal à la courbe donnée, le point générateur m est forcément dans le plan D et la courbe C correspondante est appelée la *développée* de la courbe donnée. (La surface S dont C est l'arête de rebroussement sera dite *surface développée* de la courbe donnée; cette surface est aussi l'enveloppe des plans normaux à la courbe E).

2° Etant donnée une courbe E et un plan quelconque D il existe une certaine courbe C (ou une certaine surface développable S) et une seule, telle qu'un point m de l'espace engendre la courbe donnée E lorsque la courbe C (ou la surface S) roule sur le plan fixe D.

Lorsque la courbe C roule sur le plan D, le point générateur ne peut jamais traverser le plan quoiqu'il puisse s'en rapprocher autant que l'on veut; donc lorsque le plan donné rencontre la courbe E, la courbe C se compose de deux spirales gauches ayant un point asymptotique commun, à moins que le plan donné ne rencontre la courbe E qu'orthogonalement. Dans ce cas, on dira que le plan D est une *base* de la courbe E et que la courbe C correspondante en est la *déroulée*; (la surface S dont C est l'arête

Hosted by Google

de rebroussement sera aussi appelée *surface déroulée* de la courbe E).

Il est nécessaire pour étudier analytiquement la génération des courbes gauches, d'établir une théorie des roulettes gauches analogue à celle des roulettes planes.

Sur la théorie des roulettes gauches

On donnera le nom de *roulette gauche* à la courbe engendrée par un point quelconque de l'espace entraîné dans le roulement d'une surface développable mobile sur un plan fixe, ou d'un plan mobile sur une surface développable fixe.

Lorsqu'une courbe plane roule sur une autre courbe plane *non située dans le même plan*, pour que le mouvement soit déterminé, il faut se donner la loi de variation de l'angle dièdre compris entre les plans des deux courbes. On appellera *roulette tournante* la courbe gauche engendrée par un point de l'espace entraîné dans le roulement d'une courbe plane mobile sur une autre courbe plane fixe, l'angle des plans des deux courbes planes variant de plus suivant une loi déterminée.

Nous arriverons à la détermination des roulettes gauches par la considération des roulettes tournantes; nous parlerons donc d'abord de ces dernières.

Des roulettes tournantes.

On se donne une courbe plane B fixe et une courbe plane A mobile qui touche la courbe B en un point O' et a de plus la même tangente en ce point que la courbe fixe. L'angle des plans des deux courbes est θ. On demande la

Hosted by Google

roulette décrite par un point donné de l'espace lorsque A roule sur B et que l'angle θ varie suivant une loi donnée.

On prendra comme axe des x la tangente commune aux deux courbes dans leur position initiale (fig. 18), l'origine étant un point quelconque O de cette tangente. L'axe des z sera la droite perpendiculaire à Ox située dans le plan de la courbe B, et enfin l'axe des y sera la perpendiculaire au point O sur le plan xOz.

Soient

$$\begin{cases} x \sin \omega - z \cos \omega = \varphi(\omega) \\ x \cos \omega + z \sin \omega = \varphi'(\omega) \\ \qquad\qquad\qquad y = 0 \end{cases}$$

les équations de la courbe B. Cette courbe est tangente à Ox, on a donc $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = \overline{OO'}$.

Soient de même :

$$\begin{cases} x \sin \alpha - y \cos \alpha = f(\alpha) \\ x \cos \alpha + y \sin \alpha = f'(\alpha) \\ \qquad\qquad\qquad z = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = \overline{OO'} \end{cases}$$

Les équations étant données de la courbe A dans sa position initiale, on supposera d'abord que dans cette position, le plan de la courbe A coïncide avec le plan xOy, c'est-à-dire que $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ θ_0 étant la valeur initiale de l'angle compris entre les plans des deux courbes.

Si m est le point de la courbe A qui vient coïncider avec le point n de la courbe B, les arcs $O'm$ et $O'n$ sont égaux; on a donc toujours entre les angles α et ω la relation :

$$\int_0^{\alpha} f(\alpha) d\alpha + f'(\alpha) = \int_0^{\omega} \varphi(\omega) d\omega + \varphi'(\omega) \qquad (21\ bis)$$

Hosted by Google

Remarquons maintenant que lorsque l'arc $O'm$ roule sur l'arc $O'n$, en entraînant un point quelconque de l'espace, la position finale de ce point ne dépend pas de la loi de variation de l'angle θ entre O' et n, mais seulement de la valeur de l'angle θ au point n. Ainsi pour trouver la position du point entraîné qui correspond à un point de contact quelconque n, on peut supposer que pendant le roulement, le plan de la courbe A reste perpendiculaire à celui de la courbe B jusqu'à ce que le point m vienne en n, et qu'alors seulement ce plan s'incline en tournant autour de la tangente en n, jusqu'à ce qu'il fasse avec le plan zOx l'angle θ (qui correspond au point n).

De plus on arrivera encore au même résultat si, au lieu de faire rouler l'arc $O'm$, sur l'arc $O'n$, on suppose que la courbe A roule sur l'axe Ox jusqu'à ce que le point m devienne point de contact en p et que la courbe prenne la position A', et qu'ensuite l'axe Ox roule sur la courbe B en entraînant A', car alors le point p deviendra point de contact en n, puisque l'arc $O'm = O'p =$ arc $O'n$.

Ainsi le mouvement de la courbe A peut se décomposer en trois autres : 1° un roulement de la courbe A sur une droite Ox située dans son plan; 2° un roulement de la droite Ox sur la courbe B qui est encore un roulement plan; 3° une rotation d'un angle $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ du plan vertical passant par la tangente en n, autour de cette tangente.

Soient donc u, v, w les coordonnées initiales d'un point quelconque de l'espace invariablement relié à la courbe mobile A. Après le premier roulement ce point vient en un point de coordonnées u_1, v_1, w_1; ces coordonnées sont fournies par les équations (3) relatives au roulement d'une courbe plane sur une droite :

Hosted by Google

$$\begin{cases} u_1 = u \cos \alpha + v \sin \alpha + \int_0^\alpha f(\alpha) d\alpha \\ v_1 = - u \sin \alpha + v \cos \alpha + f(\alpha) \\ w_1 = w \end{cases} \tag{22}$$

la coordonnée w ne change pas puisque ce premier roulement est parallèle au plan xOy.

Après le second roulement, le point u_1, v_1, w_1, vient en u_2, v_2, w_2, cette nouvelle position étant déterminée par les équations (13) relatives au roulement d'une droite sur une courbe plane :

$$\begin{cases} u_2 \sin \omega - w_2 \cos \omega = \varphi(\omega) - w_1 \\ u_2 \cos \omega + w_2 \sin \omega = - \int_0^\omega \varphi(\omega) d\omega + u_1 \\ v_2 = v_1 \end{cases} \tag{23}$$

la coordonnée v_1 ne change pas puisque le roulement est maintenant parallèle au plan xOz.

Reste la rotation de l'angle $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ autour de la tangente au point n. Soit N le point de coordonnées u_2, v_2, w_2, (fig. 19); abaissons de ce point une perpendiculaire NP sur l'axe de rotation nP. Si l'on élève en P la perpendiculaire PS sur la tangente nP et dans le plan xOz, la rotation du point N a lieu dans le plan NPS et si M est la position finale du point N, on a $PN = PM$ et angle $NPM = \frac{\pi}{2} - \theta$.

Soient X, Y, Z les coordonnées du point M; Q et R les projections de M et de N sur le plan xOz, lesquelles projections se trouvent sur PS; prolongeons NM et soit μ l'angle MSP. Comme PS fait avec Ox un angle égal à $\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$ on a les relations :

Hosted by Google

$$\begin{cases} X - u_2 = -\overline{MN}\cos\mu\sin\omega \\ Z - w_2 = \quad\overline{MN}\cos\mu\cos\omega \\ Y - v_2 = -\overline{MN}\sin\mu \end{cases}$$

relations que l'on peut écrire :

$$\begin{cases} X\sin\omega - Z\cos\omega = u_2\sin\omega - w_2\cos\omega - \overline{MN}\cos\mu \\ X\cos\omega + Z\sin\omega = u_2\cos\omega + w_2\sin\omega \\ \qquad\qquad Y = v_2 - \overline{MN}\sin\mu \end{cases}$$

ou encore, à cause des équations (23) :

$$\begin{cases} X\sin\omega - Z\cos\omega = \varphi(\omega) - w_1 - \overline{MN}\cos\mu \\ X\cos\omega + Z\sin\omega = -\int_0^\omega \varphi(\omega)d\omega + u_1 \\ \qquad\qquad Y = v_2 - \overline{MN}\sin\mu \end{cases}$$

De plus $NR = v_2$ et $PR = w_1$; de sorte qu'on trouve facilement les relations :

$$\overline{MN}\cos\mu = v_2\cos\theta - w_1(1 - \sin\theta)$$
$$\overline{MN}\sin\mu = w_1\cos\theta + v_2(1 - \sin\theta)$$

Reportant ces valeurs dans les équations précédentes, il vient :

$$\begin{cases} X\sin\omega - Z\cos\omega = \varphi(\omega) - v_2\cos\theta - w_1\sin\theta \\ X\cos\omega + Z\sin\omega = -\int_0^\omega \varphi(\omega)d\omega + u_1 \\ \qquad\qquad Y = v_2\sin\theta - w_1\cos\theta \end{cases}$$

Or $v_2 = v_1$, il ne reste donc plus qu'à remplacer u_1, v_1, w_1 par leur valeur tirée des équations (22) pour obtenir l'équation générale des roulettes tournantes (en tenant compte de l'équation 21 *bis*) :

Hosted by Google

$$\begin{cases} X\sin\omega - Z\cos\omega = [u\sin\alpha - v\cos\alpha - f(\alpha)]\cos\theta + \varphi(\omega) - w\sin\theta \\ X\cos\omega + Z\sin\omega = u\cos\alpha + v\sin\alpha + \varphi'(\omega) - f'(\alpha) \\ \qquad Y = [-u\sin\alpha + v\cos\alpha + f(\alpha)]\sin\theta - w\cos\theta \end{cases} \tag{24}$$

équations dans lesquelles X, Y, Z sont des coordonnées courantes d'un point quelconque de la roulette engendrée par le point initial u, v, w ; θ est un angle variant suivant une loi donnée par exemple $\theta = F(\omega)$ et enfin α dépendant de ω par la relation (21 bis).

On voit que les équations (24) constituent une généralisation des équations (15) relatives au roulement plan d'une courbe sur une autre ; il suffit en effet de poser $\theta = 0$ pour retrouver les équations (15).

On a supposé que dans leur position initiale les plans des deux courbes A et B étaient perpendiculaires l'un sur l'autre. S'il en était autrement on commencerait par faire tourner le plan de la courbe A autour de Ox jusqu'à ce qu'il coïncide avec le plan xOz ; c'est-à-dire que si θ_0 est l'angle initial des plans des deux courbes, il faut faire tourner le plan de la courbe A autour de Ox d'un angle $\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right)$. Cette rotation a pour effet de transporter un point quelconque $u_0 v_0 w_0$ au point $u\ v\ w$ donné par les relations :

$$\begin{cases} u = u_0 \\ v = \quad v_0 \sin\theta_0 + w_0 \cos\theta_0 \\ w = -v_0 \cos\theta_0 + w_0 \sin\theta_0 \end{cases} \tag{25}$$

Le reste du problème se traite comme précédemment ; si donc $u_0 v_0 w_0$ sont les coordonnées initiales d'un point entraîné, les équations (24) représentent toujours la roulette engendrée par ce point, à condition de remplacer u, v, w par leur valeur tirée des équations (25) ; mais l'on

Hosted by Google

voit que les quantités u,v,w sont des constantes; il n'est donc pas nécessaire de faire la substitution, et l'on peut considérer les équations (24) comme la formule la plus générale des roulettes tournantes, les quantités u,v,w n'étant seulement plus les coordonnées initiales du point entraîné, mais trois constantes qui en dépendent par les équations (25).

Pour avoir l'équation de la surface engendrée par une courbe quelconque de l'espace entraînée dans le mouvement de A, et dont l'équation est :

$$X = \Phi(t) \qquad Y = \chi(t) \qquad Z = \Psi(t)$$

dans sa position initiale, il suffit d'écrire que le point $u_0 v_0 w_0$ se trouve sur cette courbe :

$$u_0 = \Phi(t) \qquad v_0 = \chi(t) \qquad w_0 = \Psi(t)$$

Les équations (25) donnent alors u,v,w en fonction de t; on remplacera dans les équations (24) u,v,w par les valeurs obtenues et l'on éliminera t.

Nous avons traité le cas le plus général, mais dans la plupart des problèmes particuliers on peut simplifier les équations. Ainsi, si l'on cherche la roulette engendrée par un point de la courbe A, on prendra comme position initiale, celle où le point considéré est le point de contact; on peut aussi prendre l'origine en ce point de contact, on a alors :

$$u_0 = 0 \qquad v_0 = 0 \qquad w_0 = 0$$

d'où : $$u = 0 \qquad v = 0 \qquad w = 0$$

et les équations (24) se réduisent à :

$$\begin{cases} X \sin\omega - Z\cos\omega = \varphi(\omega) - f(\alpha)\cos\theta \\ X\cos\omega + Z\sin\omega = \varphi'(\omega) - f'(\alpha) \\ Y = f(\alpha)\sin\theta \end{cases}$$

Hosted by Google

Exemple : Supposons que les courbes A et B soient des cercles ; la roulette engendrée par un point quelconque de l'espace est alors une ligne trochoïdale tournante et la roulette décrite par un point du cercle mobile A est une ligne cycloïdale tournante.

On a vu que dans le cas de deux cercles :

$$f(\alpha) = r(1 - \cos\alpha) \qquad \varphi(\omega) = R(1 - \cos\omega)$$

et que la relation (21 bis) se réduit à : $r\alpha = R\omega$.

La ligne cycloïdale tournante décrite par l'origine a donc pour équation :

$$\left\{\begin{aligned} X\sin\omega - Z\cos\omega &= R(1-\cos\omega) - r\left(1-\cos\frac{R}{r}\omega\right)\cos\theta \\ X\cos\omega + Z\sin\omega &= R\sin\omega - r\sin\frac{R}{r}\omega \\ Y &= r\left(1-\cos\frac{R}{r}\omega\right)\sin\theta \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Pendant le mouvement, les normales $C'C$ et $C''C$ aux plans des cercles, qui passent par leur centre, se rencontrent toujours (fig. 20). Quelle que soit la position du cercle mobile, on peut toujours faire passer une sphère par les deux circonférences A et B ; le centre de cette sphère est le point C dont les coordonnées sont :

$$\left\{\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= \frac{r - R\cos\theta}{\sin\theta} \\ z &= R \end{aligned}\right.$$

Si donc on maintient l'angle θ constant pendant le roulement du cercle mobile, le centre C reste fixe, c'est-à-dire que la circonférence A reste constamment sur la surface

Hosted by Google

d'une sphère fixe dont le centre est en C et dont le rayon $S = \sqrt{CC'^2 + R^2}$.

Un point quelconque de l'espace invariablement relié au cercle A se meut sur une sphère fixe de centre C: on dit qu'il décrit une ligne trochoïdale sphérique; un point quelconque du cercle A décrit une *ligne cycloïdale sphérique* représentée par les équations (26) dans lesquelles θ est un angle donné constant.

Nous parlerons plus loin des roulettes sphériques en général ; il n'est donc pas nécessaire de s'arrêter longuement sur les lignes cycloïdales sphériques, qui n'en sont qu'un cas particulier. Remarquons seulement que le roulement du cercle A sur le cercle B revient au roulement d'un cône de révolution dont le sommet est en C et dont la base est la circonférence A, sur un autre cône de révolution ayant même sommet et dont la base est la circonférence B. Si l'on considère une droite quelconque passant par le sommet commun des deux cônes et entraînée dans le roulement du cône A, cette droite engendre un *cône trochoïdal*; si la droite considérée est une génératrice du cône A, on dira qu'elle engendre un *cône cycloïdal*.

On obtient facilement l'équation de ces cônes en exprimant l'équation de la droite donnée au moyen d'un paramètre t et en éliminant ce paramètre comme il a été dit plus haut.

On peut diviser les lignes cycloïdales sphériques en épicycloïdes sphériques et en hypocycloïdes sphériques, suivant que les deux cônes sont de côtés différents ou du même côté de leur plan tangent commun.

Lorsque $r = R \cos \theta$, le centre C coïncide avec le centre C'; la circonférence fixe B est un grand cercle de la sphère et le cône correspondant se réduit à un plan. Lors-

Hosted by Google

que le cercle A roule ainsi sur un grand cercle de la sphère on dit que l'un quelconque de ses points engendre une *cycloïde sphérique*, dont l'équation s'obtient en posant $r = R \cos \theta$ dans les formules (26).

Lorsque $R = r \cos \theta$, le centre C coïncide avec le centre C''; la circonférence A est un grand cercle de la sphère et le cône correspondant se réduit à un plan.

On a donc un plan qui roule sur un cône de révolution; la droite de contact du plan mobile engendre alors un cône développant d'un cône de révolution. Ainsi lorsqu'un grand cercle d'une sphère roule sur un petit cercle, un point quelconque du grand cercle engendre une courbe sphérique qu'on peut appeler la *développante sphérique du cercle*.

En posant $R = r \cos \theta$ dans les équations (26) on obtient pour équation de la développante sphérique:

$$\begin{cases} X = R \sin \omega \cos \frac{R}{r} \omega - r \cos \omega \sin \frac{R}{r} \omega \\ Z = R - R \cos \omega \cos \frac{R}{r} \omega - r \sin \omega \sin \frac{R}{r} \omega \\ Y = \sqrt{r^2 - R^2} \left(1 - \cos \frac{R}{r} \omega\right) \end{cases}$$

On peut facilement transporter l'origine au centre de sphère et trouver l'équation des lignes cycloïdales sphériques en fonction du rayon S de la sphère et des demi-angles Δ et δ au sommet des cônes de révolution, en remarquant que:

$$\begin{cases} R = S \sin \Delta \\ r = S \sin \delta \\ \theta = \Delta - \delta \end{cases}$$

Lorsque $R = 2\, r \cos \theta$, le cercle A passe constamment par l'un des pôles du cercle fixe B, de sorte que toutes les

Hosted by Google

boucles de la ligne cycloïdale correspondante passent par ce pôle. On retrouve donc ici toutes les différentes espèces de lignes cycloïdales excepté les paracycloïdes.

Passons maintenant à l'étude des roulettes gauches et voyons comment on peut en trouver toutes les formules par la considération des roulettes tournantes.

Nous considérons d'abord les surfaces cylindriques, puis les surfaces coniques, enfin les surfaces développables quelconques.

I° *Surfaces cylindriques.*

Lorsqu'un point de l'espace est entraîné dans le roulement d'un cylindre sur un autre cylindre, ce point décrit une roulette plane.

Si l'on prend l'axe des z parallèle aux génératrices des cylindres. Les formules sont les mêmes que pour le roulement dans un plan ; on peut remarquer seulement que pour obtenir l'équation de la surface engendrée par une courbe entraînée :

$$u = \Phi(t) \qquad v = \mathrm{X}(t) \qquad w = \Psi(t)$$

on remplace u, v, w dans les équations des roulettes par leur valeur en fonction de t et l'on élimine t.

II° *Surfaces coniques.*

En procédant comme pour les courbes planes, on est conduit à étudier d'abord le roulement d'un cône sur un plan, puis le roulement d'un plan sur un cône, enfin le roulement d'un cône sur un cône.

Lorsqu'un cône roule sur un cône, un point quelconque de l'espace décrit une roulette sphérique. Toute courbe

Hosted by Google

sphérique peut être considérée comme engendrée par le roulement d'un cône sur un plan ou celui d'un plan sur un cône, (dans les deux cas le plan passe par le centre fixe de la sphère).

Lorsqu'on astreint un plan mobile à être constamment normal à une courbe sphérique donnée, le cône sur lequel doit rouler ce plan pour engendrer la courbe donnée est le *cône développé* de cette courbe.

Lorsqu'on se donne une courbe sphérique et un plan passant par le centre de la sphère, qui ne rencontre la courbe sphérique qu'orthogonalement, le cône qui engendre la courbe donnée en roulant sur le plan fixe est *le cône déroulé* de cette courbe.

Du reste l'arête de rebroussement d'un cône quelconque est un point; on ne parlera donc pas des développées ou des déroulées des lignes sphériques.

1° *Roulement d'un cône sur un plan* : Prenons le plan sur lequel a lieu le roulement comme plan des xz et l'origine au sommet du cône (fig. 21).

En coupant le cône par le plan $z = 1$ on obtient une certaine courbe A dont l'équation peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} x \sin \alpha - y \cos \alpha = f(\alpha) \\ x \cos \alpha + y \sin \alpha = f'(\alpha) \\ z = 1 \end{cases}$$

Dans cette équation $f(\alpha)$ est la distance du point O' ($OO' = 1$) à la tangente $\overline{mP}$ à la courbe A, qui fait avec $O'X'$ un angle α dans le plan $z = 1$. Comme la courbe A est tangente à $O'X'$ on a toujours $f(0) = 0$ et $f'(0) = O'O''$. De plus $f'(\alpha)$ est la distance $\overline{mP}$ du point de contact à la perpendiculaire $\overline{O'P}$.

Hosted by Google

L'équation du cône $(\overline{OA})$ est alors évidemment:

$$\begin{cases} X \sin \alpha - Y \cos \alpha = Z f(\alpha) \\ X \cos \alpha + Y \sin \alpha = Z f'(\alpha) \end{cases}$$

puisque ces équations représentent l'enveloppe d'un plan mobile qui passe constamment par l'origine et que de plus en posant $z = 1$, on retrouve l'équation de la courbe A.

Lorsque le cône (OA) roule sur le plan des xz, la courbe plane A roule sur une certaine courbe B située dans le plan xOz et pendant ce roulement, l'angle dièdre θ compris entre le plan de la courbe A et celui de la courbe B varie suivant une loi déterminée ; si donc, connaissant l'équation de la courbe A, nous savons trouver l'équation de la courbe B (qui n'est que le développement de la section plane A) et si de plus nous savons exprimer la loi de variation de l'angle θ en fonction de α par exemple, on pourra remplacer le roulement du cône sur le plan par le roulement de la courbe plane A sur la courbe plane B et appliquer les formules relatives aux roulettes tournantes.

Sur le développement de la section plane d'un cône : On se propose, étant donné la section plane A, c'est-à-dire la fonction $f(\alpha)$, de trouver l'équation du développement B de cette section plane sur le plan tangent xOz (fig. 22), c'est-à-dire sur un plan perpendiculaire au plan de la section plane A.

Si l'on suppose que l'équation de la courbe B relativement aux axes Ox et Oz est :

$$\begin{cases} x \sin \omega + z \cos \omega = \varphi(\omega) \\ x \cos \omega - z \sin \omega = \varphi'(\omega) \end{cases}$$

le problème revient à trouver ω et $\varphi(\omega)$ en fonction de α et $f(\alpha)$. Il suffit pour cela de remarquer que ω est l'angle

Hosted by Google

que la tangente nQ à la courbe B fait avec l'axe $O'X'$; que $\varphi(\omega)$ est la distance OQ de l'origine O à cette tangente et $\varphi'(\omega)$ la distance nQ du point de contact n à la perpendiculaire OQ.

Ceci posé, la tangente mP à la courbe A est perpendiculaire sur $O'P$; cette tangente est aussi perpendiculaire sur OO' puisqu'elle est située dans le plan $X'O'Y'$; donc elle est perpendiculaire au plan $OO'P$ et par suite à la droite OP qui est dans ce plan, c'est-à-dire que l'angle mPO est droit.

Or le plan mPO est le plan tangent au cône le long de la génératrice Om; lorsque, par suite du roulement, ce plan tangent vient coïncider avec le plan XOZ, le point m vient en un certain point n de la courbe B; la tangente mP à la courbe A coïncide alors avec la tangente nQ à la courbe B, puisque les courbes A et B ont toujours même tangente au point de contact; *et comme l'angle mPO est droit* (et que Om coïncide avec On), il en résulte que le point P vient coïncider avec le point Q. On a donc: $OP = OQ = \varphi(\omega)$ et $mP = nQ = \varphi'(\omega)$.

Enfin $\overline{OP}^2 = \overline{OO'}^2 + \overline{O'P}^2 = 1 + f^2(\alpha)$, de sorte qu'on trouve les relations très simples:

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi^2(\omega) = 1 + f^2(\alpha) \\ \varphi'(\omega) = f'(\alpha) \end{array}\right. \tag{27}$$

En différentiant la première on a:

$$\varphi\,\varphi'\,d\omega = f f'\,d\alpha$$

et comme $\varphi' = f'$: $\varphi d\omega = f d\alpha$, ou en remplaçant φ par sa valeur et intégrant:

$$\omega = \int_0^{\alpha} \frac{f(\alpha)\,d\alpha}{\sqrt{1 + f^2(\alpha)}} \tag{28}$$

Hosted by Google

Cette équation fournit la relation entre ω et α ; et en remplaçant α en fonction de ω dans l'équation (27) on obtient la fonction $\varphi(\omega)$[1].

Il ne reste plus pour pouvoir appliquer les formules des roulettes tournantes qu'à trouver la loi de variation de l'angle θ que fait à chaque instant le plan de la courbe mobile A avec celui de la courbe fixe B, c'est-à-dire avec le plan xOz. Or puisqu'au point n, le plan tangent au cône le long de Om vient coïncider avec le plan xOz, l'angle θ n'est pas autre chose que l'angle de la section plane A (c'est-à-dire du plan $z = 1$) avec le plan tangent au cône le long de la génératrice Om. Ces deux plans se coupent suivant la tangente mP, et l'angle de ces deux plans est évidemment l'angle $\overline{OPO'}$ puisque $O'P$ est perpendiculaire sur mP dans le plan de la courbe A; et que OP est perpendiculaire sur mP dans le plan tangent.

Or on a : $\sin(\overline{OPO'}) = \dfrac{\overline{OO'}}{\overline{OP}}$ et $\cos(\overline{OPO'}) = \dfrac{\overline{O'P}}{\overline{OP}}$ donc

$$\sin\theta = \frac{1}{\varphi(\omega)} \quad \text{ou} \quad \cos\theta = \frac{f(\alpha)}{\varphi(\omega)} \tag{29}$$

Maintenant que la loi de variation de l'angle θ est connue on peut se servir des formules trouvées pour les roulettes tournantes. Mais ces formules ont été établies en prenant $O'X'$ comme axe des x, $O'O$ comme axe des z et $O'Y'$ comme axe des y.

Pour avoir l'équation des roulettes tournantes relative

[1] D'après un théorème connu, le point O'' est un point d'inflexion de courbe B, développement de la section plane A. Ce théorème peut se démontrer en remarquant que au point O'', $f(a) = 0$; donc en ce point $1 + f^2(a)$, c'est-à-dire $\varphi(\omega)$, passe par un minimum, ce qui prouve le théorème puisque $\varphi(\omega) = \overline{OQ}$.

Hosted by Google

aux axes OX, OY, OZ, il faut, dans les équations (24), remplacer z par $-(z-1)$ et w par $-(w-1)$. De plus dans ces mêmes équations, $\varphi(\omega)$ représente la distance du point O' à la tangente nQ; cette distance est égale à $\overline{OQ} - \overline{OO'}\cos\omega$, il faut donc aussi remplacer $\varphi(\omega)$ par : $\varphi(\omega) - \cos\omega$ et par conséquent $\varphi'(\omega)$ par $\varphi'(\omega) + \sin\omega$.

Les équations (24) deviennent, après ces substitutions :

$$\begin{cases} X\sin\omega + Z\cos\omega = (u\sin\alpha - v\cos\alpha - f)\cos\theta + \varphi + (w-1)\sin\theta \\ X\cos\omega - Z\sin\omega = u\cos\alpha + v\sin\alpha + \varphi' - f' \\ \qquad\qquad Y = (-u\sin\alpha + v\cos\alpha + f')\sin\theta + (w-1)\cos\theta \end{cases}$$

Ces équations sont les équations générales des roulettes tournantes relativement aux nouveaux axes et u, v, w, désignent bien les coordonnées initiales du point entraîné, puisque le plan de la courbe A est perpendiculaire à celui de la courbe B dans sa position initiale.

Il ne reste plus qu'à remplacer $\varphi(\omega)$, $\varphi'(\omega)$, $\sin\theta$ et $\cos\theta$ par leurs valeurs en fonction de $f(\alpha)$ tirées des équations (27) et (29). On trouve que le résultat se simplifie et l'on obtient pour équation générale des roulettes engendrées par le roulement d'un cône

$$X\sin\alpha - Y\cos\alpha = Z\,f(\alpha)$$

sur le plan xOz.

$$\begin{cases} X\sin\omega + Z\cos\omega = [w + f(\alpha)(u\sin\alpha - v\cos\alpha)]\dfrac{1}{\sqrt{1+f^2(\alpha)}} \\ X\cos\omega - Z\sin\omega = u\cos\alpha + v\sin\alpha \\ \qquad\qquad Y = [-u\sin\alpha + v\cos\alpha + w\,f(\alpha)]\dfrac{1}{\sqrt{1+f^2(\alpha)}} \end{cases} \tag{30}$$

avec $\omega = \displaystyle\int_0^\alpha \frac{f(\alpha)\,d\alpha}{\sqrt{1+f^2(\alpha)}}$

Hosted by Google

équations dans lesquelles u, v, w, sont les coordonnées initiales du point entraîné et qui ne contiennent plus la fonction $\varphi(\omega)$, mais dépendent seulement de $f(\alpha)$, c'est-à-dire de l'équation du cône donné.

En particulier, la roulette décrite par un point de l'axe Oz ($u = 0$, $v = 0$) a pour équation, en résolvant par rapport à X et Z :

$$\left\{\begin{aligned} X &= \frac{w}{\sqrt{1 + f^2(\alpha)}} \sin \omega \\ Y &= \frac{w}{\sqrt{1 + f^2(\alpha)}} f(\alpha) \\ Z &= \frac{w}{\sqrt{1 + f^2(\alpha)}} \cos \omega \end{aligned}\right. \tag{31}$$

La surface engendrée par la droite Oz supposée invariablement reliée au cône mobile, est un cône dont l'équation s'obtient en éliminant w entre les équations (31). L'équation de ce cône est donc simplement :

$$\frac{X}{\sin \omega} = \frac{Y}{f(\alpha)} = \frac{Z}{\cos \omega} \tag{32}$$

Exemple : On donne le cône :

$$X \sin \alpha - Y \cos \alpha = Z \operatorname{tang} \alpha$$

on demande l'équation de la roulette sphérique engendrée par un point w de Oz lorsque le cône donné roule sur le plan xOz.

On a ici $f(\alpha) = \operatorname{tang} \alpha$, la formule (28) est donc :

$$\omega = \int_0^\alpha \frac{\operatorname{tang} \alpha \, d\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha}} = \int_0^\alpha \sin \alpha \, d\alpha = 1 - \cos \alpha$$

La roulette cherchée est donc d'après les équations (31) :

Hosted by Google

$$\begin{cases} X = w \cos\alpha \sin(1 - \cos\alpha) \\ Y = w \sin\alpha \\ Z = w \cos\alpha \cos(1 - \cos\alpha) \end{cases}$$

L'équation du cône engendré par Oz est :

$$\frac{X}{\sin(1 - \cos\alpha)} = \frac{Y}{\tang\alpha} = \frac{Z}{\cos(1 - \cos\alpha)}$$

Les formules relatives au roulement d'un cône sur un plan ne dépendent que de $f(\alpha)$, c'est-à-dire de l'équation du cône donné. On n'a donc plus à se préoccuper de la courbe B développement de la section plane A, et dont on s'est seulement servi pour établir les formules.

Cependant il y a quelquefois avantage à prendre l'angle ω comme variable indépendante au lieu de l'angle α.

Exemple : Un cône a pour base une ligne cycloïdale plane et pour sommet un point de la perpendiculaire élevée au centre de la ligne cycloïdale sur le plan de cette dernière.

On demande l'équation du cône engendré par cette perpendiculaire, lorsque le cône donné roule sur un plan passant par l'axe de ce cône et l'un des points de rebroussement de la ligne cycloïdale.

En rendant homogènes les équations des lignes cycloïdales planes trouvées précédemment (éq. 18), on obtient de suite pour équation du cône donné :

$$\begin{cases} X \sin\alpha - Y \cos\alpha = Z(2r - R) \sin\left(\dfrac{R}{2r - R}\,\alpha\right) \\ X \cos\alpha + Y \sin\alpha = Z\,R \cos\left(\dfrac{R}{2r - R}\,\alpha\right) \end{cases}$$

Le roulement a lieu sur le plan xOz et l'axe du cône coïncide avec Oz.

Hosted by Google

La formule (28) donne en posant $R = p$ et $\frac{R}{2r - R} = a$:

$$\omega = \int_0^{\alpha} \frac{\frac{p}{a} \sin a\alpha \, d\alpha}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{a^2} \sin^2 a\alpha}}$$

Cette quadrature s'effectue facilement et l'on trouve :

$$\frac{p}{a} \cos a\alpha = \frac{p}{a} \cos a\omega - \sin a\omega$$

On a donc aussi : $f(\alpha) = \frac{p}{a} \sin a\alpha$, en fonction de ω et d'après la formule (32), le cône cherché a pour équation :

$$\frac{X}{\sin \omega} = \frac{Y}{\sqrt{\left(\frac{p^2}{a^2} - 1\right) \sin^2 a\omega + 2\frac{p}{a} \sin a\omega \cos a\omega}} = \frac{Z}{\cos \omega}$$

Des cônes déroulés des courbes sphériques : Etant donnée une courbe sphérique, il faut pour pouvoir trouver son cône déroulé, résoudre d'abord le problème inverse de celui que l'on vient de traiter, c'est-à-dire qu'il faut savoir trouver quel est le cône qui, en roulant sur un plan donné, engendre une courbe sphérique donnée (on sous-entend que le plan passe par le centre de la sphère).

La méthode dont nous nous sommes servi pour trouver la déroulée d'une courbe plane ne s'applique plus ici, mais on se servira toujours pour résoudre le problème de la forme particulière sous laquelle se présente l'équation des roulettes sphériques.

Une courbe sphérique est généralement considérée comme l'intersection d'une sphère avec un cône ayant son sommet au centre de la sphère ; les équations de cette courbe sont donc données sous la forme :

Hosted by Google

$$\begin{cases} F(X, Y, Z) = 0 \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2 \end{cases}$$

On prendra toujours le plan fixe donné comme plan des xz et l'origine au centre de la sphère; on prendra de plus comme axe des z une des droites d'intersection du plan donné avec le cône $F(X, Y, Z) = 0$. Le cône cherché est alors un cône tel que lorsqu'il roule sur le plan des xz, un point de l'axe des z engendre la courbe sphérique donnée, et par suite l'axe des z lui-même engendre le cône F. Soit : $X \cos \alpha - Y \sin \alpha = Z f(\alpha)$ l'équation du cône cherché ; il s'agit de trouver la fonction $f(\alpha)$.

Lorsque ce cône roule sur ce plan xOz, l'axe des z engendre le cône :

$$\frac{X}{\sin \omega} = \frac{Y}{f(\alpha)} = \frac{Z}{\cos \omega}$$

ou en remplaçant $f(\alpha)$ par sa valeur en fonction de $\varphi(\omega)$ tirée des équations (27) :

$$\frac{X}{\sin \omega} = \frac{Y}{\sqrt{\varphi^2(\omega) - 1}} = \frac{Z}{\cos \omega}$$

Ce cône doit coïncider avec le cône $F(X, Y, Z) = 0$.

Or F est une fonction homogène, on a donc en identifiant les deux cônes :

$$F(\sin \omega, \sqrt{\varphi^2(\omega) - 1}, \cos \omega) = 0 \qquad (33)$$

équation qui détermine la fonction $\varphi(\omega)$. Connaissant $\varphi(\omega)$, on a $f(\alpha)$ par la relation :

$$f^2(\alpha) = \varphi^2(\omega) - 1$$

à condition de connaître ω en fonction de α. Or on a vu que $f d\alpha = \varphi d\omega$, d'où :

Hosted by Google

$$\alpha = \int_0^{\omega} \frac{\varphi(\omega)\, d\omega}{\sqrt{\varphi^2(\omega) - 1}}$$

On a donc tous les éléments nécessaires pour trouver $f(\alpha)$ en fonction de α, et le problème est résolu.

Lorsqu'on prend comme plan des xz un des plans de base de la courbe sphérique, la méthode précédente permet de trouver le cône déroulé de cette courbe sphérique.

Exemple: Quel est le cône déroulé des coniques sphériques? Une conique sphérique est la courbe d'intersection d'une sphère avec un cône du second degré, ayant son sommet au centre de la sphère. En prenant pour axe des z une des droites d'intersection du cône du second degré avec l'un de ses plans de base (ou plans principaux), la section plane du cône dans le plan $z = 1$ est une conique rapportée à l'un de ses sommets et dont l'équation est par conséquent de la forme: $y^2 = \pm a^2x^2 + 2px$. En rendant cette équation homogène, on obtient pour équations de la conique sphérique:

$$\begin{cases} Y^2 = \pm a^2 X^2 + 2pXZ \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2 \end{cases}$$

La formule (33) donne alors:

$$\varphi^2(\omega) - 1 = \pm a^2 \sin^2 \omega + 2p \sin \omega \cos \omega$$

d'où : $$\alpha = \int_0^{\omega} \sqrt{\frac{1 \pm a^2 \sin^2\omega + 2p \sin\omega \cos\omega}{\pm a^2 \sin^2\omega + 2p \sin\omega \cos\omega}}\, d\omega$$

Cette quadrature conduit en général à des intégrales elliptiques; nous ne considérons donc que le cas où $a^2 = p^2 - 1$. On a alors:

$$\alpha = \int_0^{\omega} \frac{(p \sin \omega + \cos \omega)\, d\omega}{\sqrt{(p \sin \omega + \cos \omega)^2 - 1}} = \text{arc cos} \left(\cos\omega - \frac{\sin\omega}{p}\right)$$

avec : $f^2(\alpha) = \varphi^2(\omega) - 1 = (p \sin \omega + \cos \omega)^2 - 1.$

Hosted by Google

En tirant ω en fonction de α de la première équation et substituant dans la seconde, on trouve :

$$f(\alpha) = p \sin \alpha$$

Ainsi le cône déroulé des coniques sphériques :

$$\begin{cases} Y^2 = (p^2 - 1) X^2 + 2 p X Z \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2 \end{cases}$$

a pour équations :

$$\begin{cases} x \sin \alpha - y \cos \alpha = p z \sin \alpha \\ x \cos \alpha + y \sin \alpha = p z \cos \alpha \end{cases}$$

Ces équations représentent une droite située dans le xOz ; cela tient à ce que, lorsque $a^2 = p^2 - 1$, le cône du second degré est un cône de révolution et par suite la conique sphérique est simplement un cercle ; son cône déroulé se réduit donc à une droite passant par le centre du cercle ; mais comme les équations obtenues rentrent dans la forme générale des lignes cycloïdales, il est probable que le cône déroulé d'une conique sphérique quelconque est un cône cycloïdal. Si l'on n'a pas obtenu l'équation complète de ce cône, ce cône est néanmoins déterminé puisqu'on connaît la fonction $\varphi(\omega)$, c'est-à-dire l'équation du développement de sa section plane.

2° *Roulement d'un plan sur un cône :* En raisonnant comme nous l'avons fait pour les courbes planes, on démontre facilement, qu'étant donné un cône

$$X \sin \beta - Y \cos \beta = Z F(\beta)$$

l'équation de la roulette décrite par un point quelconque u, v, w, de l'espace, lorsque le plan des xz roule sur le cône donné, se déduit des formules relatives au roulement d'un

Hosted by Google

cône sur un plan, en permutant les lettres X, Y, Z avec les lettres u, v, w.

En effectuant cette permutation dans les formules (30) et résolvant par rapport à X, Y, Z, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} X \sin\beta - Y \cos\beta = [(u \sin\varphi + w \cos\varphi)\, F(\beta) - v] \dfrac{1}{\sqrt{1 + F^2(\beta)}} \\ X \cos\beta + Y \sin\beta = u \cos\varphi - w \sin\varphi \\ \qquad\qquad Z = [u \sin\varphi + w \cos\varphi + v\, F(\beta)] \dfrac{1}{\sqrt{1 + F^2(\beta)}} \end{array}\right.$$

Telles sont les formules générales relatives au roulement d'un plan sur un cône $F(\beta)$, l'angle φ désignant l'angle appelé précédemment ω, c'est-à-dire l'angle de la tangente au développement de la section du cône F par le plan $z = 1$. Cet angle φ dépend donc de β par la relation :

$$\varphi = \int_0^\beta \frac{F(\beta)\, d\beta}{\sqrt{1 + F^2(\beta)}}$$

En particulier, la roulette décrite par un point de l'axe OY ($u = 0$, $w = 0$) a pour équation, en résolvant par rapport aux coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{l} X = \dfrac{-v}{\sqrt{1 + F^2(\beta)}} \sin\beta \\ Y = \dfrac{v}{\sqrt{1 + F^2(\beta)}} \cos\beta \\ Z = \dfrac{v}{\sqrt{1 + F^2(\beta)}} F(\beta) \end{array}\right.$$

équations que l'on obtient directement de celles du cône F puisqu'elles ne contiennent plus φ.

En éliminant v, on obtient l'équation du cône engendré par la droite OY.

$$\frac{X}{\sin\beta} = \frac{Y}{-\cos\beta} = \frac{Z}{-F(\beta)}$$

Hosted by Google

Ce cône est évidemment le cône supplémentaire du cône sur lequel roule le plan.

Des cônes développés des courbes sphériques : On sait que le cône développé est l'enveloppe des plans normaux à la courbe sphérique. On peut donc trouver l'équation du cône développé par les procédés ordinaires de la théorie des enveloppes.

3° *Roulement d'un cône sur un cône.* Etant donné un cône

$$X \sin \alpha - Y \cos \alpha = f(\alpha)\, Z$$

roulant sur un cône fixe :

$$X \sin \beta - Y \cos \beta = F(\beta)\, Z$$

on sait qu'on peut remplacer le roulement par deux autres savoir 1° le roulement du cône f sur le plan des xz 2° le roulement du plan des xz sur le cône F.

Il suffit donc, pour avoir les formules relatives au roulement d'un cône sur un autre cône, de combiner les formules (30) avec les formules (34) comme on l'a fait dans le cas des courbes planes.

Dans ce qui précède, on n'a parlé que des roulettes décrites par un point ; pour avoir l'équation de la roulette surface engendrée par une courbe entraînée, on exprime l'équation de cette courbe en fonction d'un paramètre t; on écrit que le point u,v,w, se trouve sur cette courbe et on élimine t entre les trois équations de la roulette décrite par ce point, comme on l'a vu plus haut.

III. *Surfaces développables quelconques.*

1° *Roulement d'une surface développable sur un plan.* Une surface développable est l'enveloppe d'un plan mobile, c'est-à-dire du plan :

Hosted by Google

$$X \sin \alpha - Y \cos \alpha = Zf(\alpha) + f_1(\alpha)$$

équation dans laquelle α est un paramètre variable ; $f(\alpha)$ et $f_1(\alpha)$ sont deux fonctions arbitraires qui déterminent le mouvement du plan mobile.

L'équation de la surface enveloppe de ce plan s'obtient en éliminant α entre l'équation du plan et sa dérivée par rapport à α, c'est-à-dire entre les deux équations :

$$\begin{cases} X \sin \alpha - Y \cos \alpha = Zf(\alpha) + f_1(\alpha) \\ X \cos \alpha + Y \sin \alpha = Zf'(\alpha) + f_1'(\alpha) \end{cases} \qquad (35)$$

sans qu'il soit besoin d'éliminer α, on peut considérer ces deux équations comme celles de la surface développable. Toute surface développable peut se mettre sous la forme (35) ; on a ainsi des équations tout à fait analogues à celles dont nous nous sommes servis jusqu'ici.

Les formules relatives au roulement des surfaces développables, s'obtiennent encore par la considération des roulettes tournantes.

En coupant la surface développable donnée par les plans $z = 0$ et $z = 1$, on obtient deux courbes planes A et B (fig. 23) dont les équations sont :

$$\text{A} \quad \begin{cases} x \sin \alpha - y \cos \alpha = f_1(\alpha) \\ x \cos \alpha + y \sin \alpha = f'_1(\alpha) \end{cases} \qquad \text{avec} \begin{cases} f_1(0) = 0 \\ f_1'(0) = \overline{OO'''} \end{cases}$$

et :

$$\text{B} \quad \begin{cases} x \sin \alpha - y \cos \alpha = f(\alpha) + f_1(\alpha) \\ x \cos \alpha + y \sin \alpha = f'(\alpha) + f'_1(\alpha) \end{cases} \qquad \text{avec} \begin{cases} f(0) + f_1(0) = 0 \\ f'(0) + f'_1(0) = \overline{O'O''} \end{cases}$$

Le paramètre α est donc l'angle que l'axe des x fait avec la tangente à l'une de ces courbes.

Lorsque la surface développable roule sur le plan xOz, la courbe A roule sur une certaine courbe C située dans le plan xOz ; la courbe B roule aussi sur une certaine courbe D du même plan.

Hosted by Google

Pendant que la courbe plane B roule sur la courbe plane D, l'angle dièdre θ que fait à chaque instant le plan mobile de la courbe B avec le plan fixe de la courbe D, varie suivant une loi déterminée par la forme de la surface développable.

Si donc, connaissant l'équation de la surface développable, on sait trouver l'équation de la courbe D et la loi de variation de l'angle θ, on pourra remplacer le roulement de cette surface développable sur le plan des xz par le roulement de la courbe plane B sur la courbe plane D et se servir des formules relatives aux roulettes tournantes.

On dira que les courbes C et D sont les *développements* des sections planes A et B. Le premier problème à résoudre est donc : Etant données deux sections planes parallèles d'une surface développable trouver l'équation de leurs développements.

Sur le développement de deux sections planes parallèles d'une surface développable sur un plan tangent perpendiculaire aux plans des sections planes.

Comme les intersections des plans $z = 0$ et $z = 1$ avec un plan tangent quelconque à la surface développable sont deux droites parallèles, si l'on mène aux courbes A et B deux tangentes parallèles, c'est-à-dire inclinées d'un même angle α, la droite mp qui joint leur point de contact est une génératrice de la surface. Si des points O et O' on abaisse des perpendiculaires OR et $O'P$ sur ces tangentes on sait que l'on a :

$$\overline{OR} = f_1(\alpha) \qquad \overline{pR} = f'_1(\alpha)$$
$$\overline{O'P} = f(\alpha) + f_1(\alpha) \qquad \overline{mP} = f'(\alpha) + f'_1(\alpha)$$

Lorsque la surface développable roule, il arrive un moment où le plan tangent $PmpR$ coïncide avec le plan

Hosted by Google

des xz ; à ce moment le point m coïncide avec un certain point n de la courbe C et le point p avec un certain point q de la courbe D. La tangente mP coïncide aussi avec la tangente nQ à la courbe C et la tangente pR avec la tangente qS à la courbe D; enfin pm coïncide avec qn. Or les tangentes mP et pR sont toujours parallèles entre elles, donc la tangente au point n à la courbe C est parallèle à la tangente au point q à la courbe D.

On peut donc exprimer les équations des courbes C et D en fonction d'un même angle ω; cet angle est celui que font les tangentes nQ et qS avec $O'X'$. Soit donc:

$$\text{C} \begin{cases} x \sin \omega + z \cos \omega = \varphi(\omega) + \varphi_1(\omega) \\ x \cos \omega - z \sin \omega = \varphi'(\omega) + \varphi'_1(\omega) \end{cases}$$

l'équation de la courbe C, et:

$$\text{D} \begin{cases} x \sin \omega + z \cos \omega = \varphi_1(\omega) \\ x \cos \omega - z \sin \omega = \varphi'_1(\omega) \end{cases}$$

celle de la courbe D. Le problème revient à trouver ω, $\varphi(\omega)$ et $\varphi_1(\omega)$ connaissant α, $f(\alpha)$ et $f_1(\alpha)$.

Or on a:

$$\overline{OS} = \varphi_1(\omega) \qquad \overline{qS} = \varphi'_1(\omega)$$
$$\overline{OQ} = \varphi(\omega) + \varphi_1(\omega) \qquad \overline{nQ} = \varphi'(\omega) + \varphi'_1(\omega)$$

Si l'on joint le point P au point R, comme la tangente $\overline{mP}$ est perpendiculaire sur $O'P$ et sur $\overline{OO'}$, elle est perpendiculaire au plan $ROO'P$ et par suite à PR. Lorsque le point m coïncide avec n et le point p avec q, on sait que les tangentes coïncident aussi deux à deux, donc leurs distances sont égales, c'est-à-dire que $\overline{PR} = \overline{QS} = \overline{OQ} - \overline{OS} = \varphi(\omega)$. Si maintenant par le point O on mène une parallèle ON à PR, on a:

Hosted by Google

$\overline{ON} = \overline{PR} = \varphi(\omega)$ et $\overline{O'N} = \overline{O'P} - \overline{NP} = \overline{O'P} - \overline{OR} = f(\alpha)$

Or, dans le triangle rectangle $OO'N$, on a $\overline{OO'} = 1$ et par suite : $\overline{ON}^2 = 1 + \overline{O'N}^2$, c'est-à-dire :

$$\varphi^2(\omega) = 1 + f^2(\alpha) \tag{36}$$

De même, si par le point p on mène une parallèle pE à PR, cette parallèle est perpendiculaire sur la tangente mP; donc lorsque m vient en n et p en q, pE vient coïncider avec la perpendiculaire qM abaissée du point q sur la tangente nQ.

Or on a :

$$\overline{nM} = \overline{MQ} - \overline{nQ} = \overline{qS} - \overline{nQ} = -\varphi'(\omega)$$

et aussi : $\overline{nM} = \overline{mE} = \overline{EP} - \overline{mP} = \overline{pR} - \overline{mP} = -f'(\alpha)$ donc :

$$\varphi'(\omega) = f'(\alpha)$$

En différentiant l'équation (36), on a :

$$\varphi\,\varphi'\,d\omega = f f'\,d\alpha$$

et comme $\varphi' = f'$ on a encore : $\varphi\,d\omega = f\,d\alpha$ d'où

$$\omega = \int_0^\alpha \frac{f(\alpha)\,d\alpha}{\sqrt{1 + f^2(\alpha)}} \tag{37}$$

Ainsi l'on connaît ω et $\varphi(\omega)$ en fonction de α et $f(\alpha)$.

Pour déterminer $\varphi_1(\omega)$, il faut écrire que l'élément d'arc de la courbe B est égal à l'élément ds de la courbe D, c'est-à-dire que :

$$ds = [f_1(\alpha) + f''_1(\alpha)]\,d\alpha$$

si donc x et z sont les coordonnées d'un point quelconque de la courbe D, on a :

$$dx = \cos\omega\,[f_1(\alpha) + f_1''(\alpha)]\,d\alpha$$
$$dz = -\sin\omega\,[f_1(\alpha) + f_1''(\alpha)]\,d\alpha$$

Hosted by Google

équations qu'on peut intégrer, puisqu'on connaît ω en fonction de α. En désignant la distance $\overline{OO'''}$ par a, l'équation de la courbe D est donc :

$$\begin{cases} x = a + \int_0^\alpha \cos\omega\,[f_1(\alpha) + f_1''(\alpha)]\,d\alpha \\ z = -\int_0^\alpha \sin\omega\,[f_1(\alpha) + f_1''(\alpha)]\,d\alpha \end{cases}$$

Mais la courbe D a aussi pour équation :

$$\begin{cases} x \sin\omega + z\cos\omega = \varphi_1(\omega) \\ x\cos\omega - z\sin\omega = \varphi'_1(\omega) \end{cases}$$

On a donc aussi pour déterminer $\varphi_1(\omega)$ et $\varphi'_1(\omega)$:

$$\begin{cases} \varphi_1(\omega)\sin\omega + \varphi_1'(\omega)\cos\omega = a + \int_0^\alpha \cos\omega\,[f_1(\alpha) + f_1''(\alpha)]\,d\alpha \\ \varphi_1(\omega)\cos\omega - \varphi_1'(\omega)\sin\omega = -\int_0^\alpha \sin\omega\,[f_1(\alpha) + f_1''(\alpha)]\,d\alpha \end{cases}$$

On peut remarquer que le théorème sur les points d'inflexion du développement de la section plane d'un cône (sur un plan tangent perpendiculaire au plan de la section plane) subsiste dans le cas d'une surface développable quelconque, c'est-à-dire que les points O'' et O''' sont des points d'inflexion des développements C et D.

Car si l'on désigne par R et r les rayons de courbure des courbes B et D aux points correspondants, puisque les éléments d'arc de ces courbes sont égaux, on a : $Rd\alpha = rd\omega$; mais on a aussi $f(\alpha)\,d\alpha = \varphi(\omega)\,d\omega$, c'est-à-dire :

$$\frac{d\alpha}{d\omega} = \frac{\varphi(\omega)}{f(\alpha)} = \frac{1}{\cos\theta}$$

d'où

$$r = R\,\frac{1}{\cos\theta}$$

Hosted by Google

Or au point O''', l'angle θ est droit donc r est infini. Il en est de même au point O''.

Enfin pour avoir la loi de variation de l'angle θ, il suffit de remarquer que cet angle est toujours l'angle que font les sections planes A et B avec le plan tangent à la surface développable le long de la génératrice mp. On a donc:

$$\theta = \text{angle } \overline{O'PR} = \text{angle } \overline{O'NO}$$

$$\text{Or :} \quad \sin \overline{O'NO} = \frac{\overline{OO'}}{\overline{ON}} \quad \text{et} \quad \cos \overline{O'NO} = \frac{\overline{O'N}}{\overline{ON}}$$

c'est-à-dire encore :

$$\sin \theta = \frac{1}{\varphi(\omega)} \qquad \text{et} \qquad \cos \theta = \frac{f(\alpha)}{\varphi(\omega)}$$

Il ne reste plus maintenant qu'à reporter toutes ces valeurs dans les équations des roulettes tournantes. Afin de ne pas compliquer inutilement les formules, nous ne rechercherons que l'équation de la roulette décrite par l'origine. La roulette décrite par un point quelconque de l'espace, s'obtiendrait de même, on aurait seulement des équations un peu plus longues. Supposons encore $a = 0$ c'est-à-dire que l'origine O coïncide avec le point de contact O'''.

En posant $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, dans les équations (24) relatives aux roulettes tournantes et résolvant ces équations par rapport à X, Y et Z, on obtient :

$$\begin{cases} X = [\varphi_1(\omega)\sin\omega + \varphi'_1(\omega)\cos\omega] - f_1(\alpha)\cos\theta\sin\omega - f'_1(\alpha)\cos\omega \\ Z = [\varphi_1(\omega)\cos\omega - \varphi'_1(\omega)\sin\omega] - f_1(\alpha)\cos\theta\cos\omega + f'_1(\alpha)\sin\omega \\ Y = f_1(\alpha)\sin\theta \end{cases}$$

Dans ces équations on a remplacé Z par $-Z$, parce que l'axe Oz a une direction opposée à celle qu'il avait lorsqu'on a établi l'équation des roulettes tournantes.

Hosted by Google

Remplaçant $\varphi_1(\omega)$ et θ par leur valeur, on trouve :

$$\left\{\begin{aligned} X &= \int_0^{\alpha} \cos\omega\,[f_1(\alpha)+f_1''(\alpha)]\,d\alpha - \frac{f(\alpha)f_1(\alpha)\sin\omega}{\sqrt{1+f'^2(\alpha)}} - f_1'(\alpha)\cos\omega \\ Z &= -\int_0^{\alpha} \sin\omega\,[f_1(\alpha)+f_1''(\alpha)]\,d\alpha - \frac{f(\alpha)\,f_1(\alpha)}{\sqrt{1+f'^2(\alpha)}}\cos\omega + f_1'(\alpha)\sin\omega \\ Y &= \frac{f_1(\alpha)}{\sqrt{1+f'^2(\alpha)}} \end{aligned}\right. \tag{38}$$

avec $\omega = \int_0^{\alpha} \frac{f(\alpha)\,d(\alpha)}{\sqrt{1+f'^2(\alpha)}}$. Telles sont les équations de la roulette décrite par l'origine, lorsque la surface développable roule sur le plan des xz ; ces équations ne dépendent plus que des fonctions $f(\alpha)$ et $f_1(\alpha)$, c'est-à-dire de l'équation de la surface développable.

Exemple : On donne la surface développable enveloppe du plan mobile :

$$X \sin\alpha - Y\cos\alpha = Z\,\mathrm{tg}\,\alpha + R\,(1 - \cos\alpha)$$

et l'on demande l'équation de la roulette gauche engendrée par un point de cette surface, lorsqu'elle roule sur un de ses plans tangents, c'est-à-dire l'équation des déroulantes de la surface donnée.

On commence par prendre le dit plan tangent comme plan des xz ; et l'on choisit comme position initiale de la surface celle où le point générateur se trouve en contact avec le plan fixe. On peut alors faire coïncider l'origine avec la position initiale du point générateur et faire usage des formules (38).

Ces transformations ont déjà été effectuées dans l'équation donnée ; celle-ci représente en effet une surface développable tangente au plan des xz, puisque l'on a actuellement :

Hosted by Google

$$f(\alpha) = \text{tang}\ \alpha \qquad f_1(\alpha) = R(1 - \cos\alpha)$$

Si donc on coupe cette surface par les plans $z=0$ et $z=1$, on obtient les deux courbes :

$$x \sin\alpha - y \cos\alpha = R(1 - \cos\alpha)$$

et $$x \sin\alpha - y \cos\alpha = \text{tang}\ \alpha + R(1 - \cos\alpha)$$

Ces deux courbes sont bien tangentes à l'axe des x ; la première est un cercle passant par l'origine.

On a d'abord :

$$\omega = \int_0^\alpha \frac{\text{tang}\ \alpha\, d\alpha}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\alpha}} = 1 - \cos\alpha$$

et :

$$f_1(\alpha) + f_1''(\alpha) = R$$

On peut prendre ω pour variable indépendante ; on a alors : $\cos\alpha = 1 - \omega$; $\sin\alpha = \sqrt{\omega(2-\omega)}$; et $d\alpha = \dfrac{d\omega}{\sqrt{\omega(2-\omega)}}$

D'où pour équation de la roulette décrite par l'origine, en employant les formules (38) :

$$\begin{cases} X = R\displaystyle\int_0^\omega \frac{\cos\omega\, d\omega}{\sqrt{\omega(2-\omega)}} - R\sqrt{\omega(2-\omega)}\,(\omega \sin\omega + \cos\omega) \\ Z = -R\displaystyle\int_0^\omega \frac{\sin\omega\, d\omega}{\sqrt{\omega(2-\omega)}} - R\sqrt{\omega(2-\omega)}\,(\omega\cos\omega - \sin\omega) \\ Y = R\,\omega\,(1-\omega) \end{cases}$$

2° *Roulement d'un plan sur une surface développable*

Pour avoir l'équation de la roulette engendrée par un point $u, v, w,$ de l'espace, lorsque le plan des xz roule sur une surface développable donnée, il suffit, dans les formules générales relatives au roulement d'une surface développable sur le plan des xz, de permuter les lettres X, Y, Z avec les lettres u, v, w. On peut effectuer cette permutation

Hosted by Google

dans les équations (24) relatives aux roulettes tournantes ce qui donne, après avoir résolu par rapport aux nouvelles lettres X, Y, Z (et en se rappelant qu'on doit changer Z en $-Z$ et par conséquent aussi w en $-w$) :

$$\begin{cases} X\sin\alpha - Y\cos\alpha = [u\sin\omega + w\cos\omega - \varphi_1(\omega)]\cos\theta - v\sin\theta + f_1(\alpha) \\ X\cos\alpha + Y\sin\alpha = u\cos\omega - w\sin\omega + f_1'(\alpha) - \varphi_1'(\omega) \end{cases}$$

$$Z = [u\sin\omega + w\cos\omega - \varphi_1(\omega)]\sin\theta + v\cos\theta$$

équations dans lesquelles il n'y a plus qu'à remplacer ω, θ et $\varphi_1(\omega)$ par leur valeur, trouvée précédemment en fonction de α.

3° *Roulement d'une surface développable sur une surface développable.* En général ce roulement n'est pas possible sans glissement, si l'on veut que les deux surfaces aient constamment une génératrice en commun. Il suffit pour s'en rendre compte de considérer le mouvement des courbes gauches qui sont les arêtes de rebroussement des deux surfaces développables.

On dira qu'une courbe gauche roule sur une autre courbe gauche, lorsque la première courbe roule sur la seconde de manière à ce que les plans osculateurs des deux courbes, correspondant à leur point de contact, coïncident constamment.

Le roulement infiniment petit d'une courbe gauche est alors le résultat de deux rotations infiniment petites, savoir : 1° une rotation du plan osculateur de la courbe mobile autour de la tangente commune aux deux courbes, mouvement qu'on peut appeler le *roulement de torsion* de la courbe mobile; 2° une rotation de la courbe mobile parallèle à son plan osculateur et autour du point de contact, ou si l'on veut une rotation de la courbe mobile autour de de la bi-normale commune aux deux courbes, mouvement

Hosted by Google

que l'on peut appeler le *roulement de courbure* de la courbe mobile.

Dans le roulement plan, le roulement de courbure est le seul qui existe parce que la torsion des courbes planes est nulle. Mais d'une manière plus générale, on peut dire que le roulement d'une courbe gauche sur une autre ne donnera pas lieu à un roulement de torsion lorsque les deux courbes gauches ont constamment le même rayon de torsion en leur point de contact. Au contraire le roulement ne donnera pas lieu à un roulement de courbure toutes les fois que les deux courbes ont constamment le même rayon de courbure en leur point de contact.

Enfin si les rayons de torsion et les rayons de courbure sont constamment égaux, il n'y a plus de roulement possible, parce qu'alors les deux courbes gauches coïncident.

Le roulement d'une courbe gauche sur un plan tel que nous l'avons défini plus haut est un pur roulement de torsion, car le roulement sur le plan de la surface développable dont la courbe gauche est l'arête de rebroussement, consiste en une simple rotation autour de la génératrice de contact, c'est-à-dire de la tangente à la courbe gauche.

En général, lorsqu'une courbe gauche roule sur une autre, si l'on considère les surfaces développables dont ces courbes gauches sont les arêtes de rebroussement, on voit que le roulement de torsion produit le roulement d'une des surfaces sur l'autre, c'est-à-dire une rotation autour de leur génératrice de contact, tandis que le roulement de courbure produit un glissement de la surface développable mobile sur le plan tangent commun, glissement qui a pour effet de ramener en coïncidence les génératrices des deux surfaces qui tendaient à se séparer par suite du roulement de torsion.

Hosted by Google

Donc pour qu'une surface développable puisse rouler sur une autre sans glissement, il faut que le roulement de leurs arêtes de rebroussement soit un pur roulement de torsion, c'est-à-dire que ces arêtes aient constamment le même rayon de courbure en leur point de contact. Si cette condition est remplie, on obtiendra l'équation de la trajectoire décrite par un point quelconque de l'espace u,v,w, en combinant les formules relatives au roulement d'une surface développable sur un plan avec celles relatives au roulement d'un plan sur une surface développable, exactement comme on a combiné le roulement d'une courbe sur une droite avec celui d'une droite sur une courbe pour obtenir le roulement d'une courbe sur une courbe, dans le plan.

Mais il y a une autre sorte de roulement sans glissement d'une surface développable sur une autre : c'est le roulement dans lequel les deux surfaces n'ont qu'un seul point de contact ; ce roulement est plus général puisque les deux surfaces ne sont plus astreintes à avoir une génératrice commune ; ce roulement peut être réalisé par des surfaces développables quelconques, et cela d'une infinité de manières.

On a déjà traité à propos du roulement dans le plan, le mouvement produit par une courbe qui roule sur une droite, tandis que cette droite roule sur une autre courbe fixe. De même, considérons dans l'espace deux surfaces développables qui ont un plan tangent commun sans avoir une génératrice commune ; si la première surface roule sur le plan tangent pendant que celui-ci roule sur la seconde surface, les deux surfaces roulent l'une sur l'autre (sans glissement) car elles ont toujours un point de contact, qui est l'intersection des deux génératrices qui se trouvent dans le plan tangent mobile.

Hosted by Google

Exemple : Roulement d'un cône sur un cylindre. On prend comme plan des xz le plan tangent commun au cône et au cylindre, comme origine le sommet du cône, et comme axe des z une droite parallèle aux génératrices du cylindre (fig. 24).

Cherchons par exemple la roulette décrite par un point w de l'axe des z ($u = 0$, $v = 0$). Soit :

$$X \sin \alpha - Y \cos \alpha = Z f(\alpha) \qquad \text{avec } f(0) = 0$$

l'équation du cône dans sa position initiale ; et :

$$X \sin \varphi - Y \cos \varphi = F(\varphi) \qquad \text{avec } F(0) = 0$$

l'équation du cylindre fixe. Lorsque le cône f roule sur le plan des xz, le point w décrit la roulette :

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= \frac{w}{\sqrt{1 + f^2(\alpha)}} \sin \omega \\ v_1 &= \frac{w}{\sqrt{1 + f^2(\alpha)}} f(\alpha) \qquad \text{avec } \omega = \int_0^\alpha \frac{f\alpha \, d\alpha}{\sqrt{1 + f^2(\alpha)}} \\ w_1 &= \frac{w}{\sqrt{1 + f^2(\alpha)}} \cos \omega \end{aligned}\right.$$

d'après les formules (31) ; lorsque le plan des xz roule sur le cylindre F, l'équation de la roulette décrite par un point u_1, v_1, w_1, de l'espace, est, d'après les formules (13) :

$$\left\{\begin{aligned} X \sin \varphi - Y \cos \varphi &= F(\varphi) - v_1 \\ X \cos \varphi + Y \sin \varphi &= - \int_0^\varphi F(\varphi) \, d\varphi + u_1 \\ Z &= w_1 \end{aligned}\right.$$

En éliminant u_1, v_1, w_1, on obtient l'équation de la roulette engendrée par le point w, lorsque le cône roule sur le cylindre :

Hosted by Google

$$\left\{\begin{aligned} X\sin\varphi - Y\cos\varphi &= F(\varphi) - \frac{w}{\sqrt{1+f^2(\alpha)}}f(\alpha) \\ X\cos\varphi + Y\sin\varphi &= -\int_0^{\varphi} F(\varphi)\,d\varphi + \frac{w}{\sqrt{1+f^2(\alpha)}}\cos\omega \\ Z &= \frac{w}{\sqrt{1+f^2(\alpha)}}\sin\omega \end{aligned}\right. \qquad (39)$$

Ces équations contiennent deux paramètres arbitraires, α et φ. La roulette ne sera donc déterminée que lorsqu'on se sera donné une relation entre ces deux paramètres.

On traiterait de même le roulement d'un cylindre sur un cône.

Remarque sur la génération des surfaces : Lorsque les angles α et φ sont laissés indépendants, les équations (39) représentent une surface. Cette surface est le lieu de toutes les roulettes engendrées par le point w lorsque le cône roule sur le cylindre de toutes les manières possibles en partant de la même position initiale. On peut appeler ce lieu, la *surface roulette* du point w. Ainsi, lorsqu'une surface développable quelconque roule sur une autre surface développable de toutes les manières possibles en partant de la même position initiale, un point quelconque de l'espace engendre une surface roulette, dont l'équation peut s'obtenir par la méthode précédente. Réciproquement, on pourrait considérer une surface donnée quelconque comme engendrée par une surface développable qui roule de toutes les manières possibles sur une autre surface développable à partir d'une certaine position initiale.

Hosted by Google

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRATION DES COURBES PLANES

Partie préliminaire 3
Sur la théorie des roulettes planes 10
I. Roulement d'une courbe sur une droite 12
II. Roulement d'une droite sur une courbe 32
III. Roulement d'une courbe sur une courbe 35
Des lignes cycloïdales 38
IV. Génération des coniques 43
V. Classification des coniques 46

CHAPITRE II

GÉNÉRATION DES COURBES GAUCHES

Partie préliminaire 56
Sur la théorie des roulettes gauches 58
Des roulettes tournantes 58
I. Surfaces cylindriques 68
II. Surfaces coniques 68
III. Surfaces développables quelconques 81

Hosted by Google

Hosted by Google